



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Construction de maillages de degré 2

Partie 3 : Tétraèdre P2

Paul Louis George — Houman Borouchaki

N° 7626

Mai 2011

— Computational models and simulation —

A large, light gray stylized letter 'R' that serves as a background for the text.

*Rapport
de recherche*

Construction de maillages de degré 2 Partie 3 : Tétraèdre P2

Paul Louis George^{*}, Houman Borouchaki[†]

Theme : Computational models and simulation
Applied Mathematics, Computation and Simulation
Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 7626 — Mai 2011 — 51 pages

Résumé : La résolution de nombreux problèmes formulés en E.D.P. (équations aux dérivées partielles) nécessite le recours à des éléments finis de degré deux ou plus. Ce rapport en trois parties se propose de montrer comment construire de tels maillages dans le cas d'éléments triangulaires (plans ou surfaciques) ou tétraédriques (dans le cas volumique) en se restreignant au degré deux.

La première partie de ce rapport, [10], discute le cas plan et, donne, en premier, quelques rappels sur les courbes de Bézier de degré deux et sur les triangles de Bézier de degré deux également. Dans le cas des triangles, on fait le lien avec les éléments finis de degré deux, ou éléments P2 Lagrange. On donne les conditions de validité de tels éléments et on montre quelques cas d'éléments non valides en proposant quelques idées permettant de les corriger. On décrit ensuite une méthode de construction de maillages P2 plans. Le cas des surfaces gauches est l'objet de la seconde partie de ce papier [3].

Cette troisième partie traite du cas volumique, autrement dit des tétraèdres P2. Elle est organisée exactement comme la première partie. On définit les courbes, les triangles et les tétraèdres de Bézier. On fait le lien entre ces derniers et les éléments finis tétraédriques à 10 nœuds, les tétraèdres P2. On donne une condition suffisante de validité. On regarde, au passage, le cas d'un élément simplicial de degré et de dimension quelconque en exhibant les formules correspondantes. Enfin, on revient sur le tétraèdre P2 et on donne une méthode de construction qui est illustrée par plusieurs exemples réalistes.

Mots-clés : Triangle P2. Triangle à 6 nœuds. Tétraèdre P2. Tétraèdre à 10 nœuds. Maillage P2. Éléments Finis P2. Courbe de Bézier. Triangle de Bézier. Tétraèdre de Bézier. Simplexe de degré et de dimension arbitraire.

^{*} INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

[†] UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

Construction of meshes of degree 2

Part 3: P2 tetrahedron

Abstract: There is a need for finite elements of degree two or more to solve various P.D.E. problems. This report in three parts discusses a method to construct such meshes in the case of triangular element (in the plane or for a surface) or tetrahedral element (in the volume case) by looking at the degree 2.

The first part of this paper, [10], considers the planar case and, to begin with, returns to Bézier curves and Bézier triangles of degree 2. In the case of triangles, the relation with Lagrange P2 finite element is shown. Validity conditions are discussed and some unvalid elements are shown while proposing a method to correct them. A construction method is then proposed and several application examples are given.

This third part considers the case of P2 tetrahedra following the same organization as in part 1. Bézier curves, triangles and tetrahedra are briefly recalled. The way in which a Bézier tetrahedron and a P2 finite element tetrahedron are related is introduced. A validity condition is then exhibited. Extension to arbitrary degree and dimension is proposed while giving the reading of the corresponding formula. Then we return to the P2 tetrahedron and a construction method is proposed and demonstrated by means of various concrete application examples.

Key-words: P2 triangle. 6-node triangle. P2 tetrahedron. 10-node tetrahedron. P2 mesh. P2 finite element. Bézier curve. Bézier triangle, Bézier tetrahedron. High order simplex.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Courbe, triangle et tétraèdre de Bézier de degré 2	4
2.1	Courbe de Bézier de degré 2	4
2.2	Triangle de Bézier de degré 2	5
2.3	Tétraèdre de Bézier de degré 2	5
3	Élément fini tétraédrique de degré 2 ou tétraèdre P2	6
3.1	Définitions, notations et conventions	6
3.2	Sur le(s) jacobien(s) du tétraèdre P2	8
3.3	Validité d'un élément fini P2	10
4	Tétraèdre P2 vu comme un tétraèdre de Bézier	10
4.1	Forme de Bézier du tétraèdre P2	10
4.2	Le jacobien	11
4.3	Validité d'un tétraèdre P2	14
4.4	Éléments tétraédriques non valides	16
5	Le simplexe de dimension et de degré quelconque	17
5.1	Carreau quelconque, dérivées partielles et jacobien	17
5.2	Validation sur le triangle P2	19
5.3	Validation sur le tétraèdre P2	21
5.4	Instanciations pour le triangle P3	24
5.5	Remarque sur le calcul effectif des N_I	26
6	Construction du maillage tétraédrique P1	26
6.1	Compatibilité P2-P1 d'un maillage de surface P2	27
6.2	Compatibilité P1-P2 d'un maillage tétraédrique P1	27
7	Passage du P1 au P2	27
7.1	Les nœuds "milieux", position et numérotation	27
7.2	Éléments P1 virtuels	28
7.3	Validité et qualité	28
7.4	Construction du maillage P2	29
8	Quelques algorithmes	29
8.1	Redressement par minimisation de la déformation (validité)	30
8.2	Redressement par similitude ou bougé (validité)	33
8.2.1	Redressement par similitude avec une face	34
8.2.2	Redressement par similitude avec une arête	34
8.2.3	Ouverture d'un élément plat par bougé	35
8.3	Optimisation par bascule de faces et par bougé (qualité)	35
8.3.1	La bascule de face et le bougé	35
8.3.2	Optimisation via la dispersion des jacobiens	35
8.3.3	Optimisation de la qualité en forme	36
9	L'algorithme général	36
10	Tests et exemples	36
10.1	Validation de la structure du code	36
10.2	Nature qualitative des résultats	37
10.3	Quelques exemples	37
11	Conclusions	37
12	Annexes	40

1 Introduction

La résolution de nombreux problèmes formulés en E.D.P. nécessite le recours à des éléments finis de degré deux ou plus, en particulier, pour les problèmes fortement non-linéaires (problèmes de plasticité en mécanique des solides, ..). En outre, de tels éléments permettent une représentation plus fidèle des géométries complexes (frontières courbes).

La construction de maillage avec ce type d'éléments est loin d'être une opération triviale, contrairement à ce que l'on pense en général. Ce sujet est d'ailleurs rarement abordé dans le détail et très peu de papiers sont disponibles, on pense en effet qu'il suffit de modifier sans grandes difficultés un maillage de degré un pour obtenir le résultat cherché et que le sujet n'en est pas vraiment un.

Les quelques papiers disponibles sur ce sujet sont relatifs à deux de ses aspects. Le premier concerne l'utilisation d'éléments finis d'ordre quelconque dans le cadre de géométries simples (le problème de construction étant alors trivial). Ces papiers, [5], [6], ..., traitent essentiellement les aspects formulation éléments finis et convergence. Le second concerne effectivement le cas de géométries complexes et, dans ce cadre, la plupart des références sont issues de l'équipe de M.S. Shephard et certaines d'entre elles sont listées en fin de ce rapport.

Il y a, *a priori*, deux approches possibles pour obtenir un maillage de degré deux, ou P2 (on se cantonne à ce degré). La première approche consiste à modifier un maillage de degré un, ou P1, et à transformer les éléments "droits" en éléments "courbes" en créant les nœuds différents des sommets P1 et en courbant les arêtes devant l'être. L'autre approche consiste à construire directement les éléments P2.

La première approche semble être la solution la meilleure et la plus simple pour traiter le cas des maillages plans et volumiques. Les triangles, resp. les tétraèdres, du maillage P1 sont modifiés. La seconde approche semble être la solution la plus adéquate pour traiter le cas des maillages des surfaces gauches, en particulier dans le cas des surfaces paramétrées. Les triangles P1 de l'espace des paramètres sont envoyés dans l'espace et on forme au vol les triangles P2 (autrement dit, on ne considère jamais un maillage P1 complet de la surface).

Autour de ce qu'est un maillage P2, se posent de nombreuses questions, à commencer simplement par définir les critères de validité puis sur la définition de la notion de qualité pour un élément P2. La vision Bézier d'un tétraèdre P2 et sa vision habituelle élément fini sont mises en correspondance.

Ce papier se concentre donc sur le cas d'un tétraèdre, le cas d'une surface est l'objet de [3] tandis que le cas 2D est traité dans [10].

Le plan suivi ici est peu ou prou celui adopté dans [10]. Au passage, on regarde également le cas d'un simplexe de degré et de dimension quelconque et on exhibe la forme générale de différentes quantités.

2 Courbe, triangle et tétraèdre de Bézier de degré 2

Dans cette section, on ne fait que rappeler, dans le formalisme¹ basé sur les polynômes de Bernstein, les définitions relatives aux courbes et triangles de Bézier puis on introduit les tétraèdres de Bézier.

2.1 Courbe de Bézier de degré 2

On se donne trois points de contrôle de \mathbb{R}^3 , notés P_{ij} avec $i + j = 2$, la courbe Γ définie par, cf. [10],

$$P(u, v) = u^2 P_{20} + 2uv P_{11} + v^2 P_{02}, \quad (1)$$

pour $u + v = 1$ et $u \in [0, 1]$ est la courbe de Bézier de degré 2, en notation Bernstein. Cette courbe passe par P_{20} et P_{02} . Elle est utilisée pour définir les arêtes courbes des éléments finis

¹Nous choisissons cette écriture car elle est identique pour les courbes, les triangles, les tétraèdres et d'autres quantités qui nous intéresseront par la suite.

P2 (triangle et tétraèdre). Soit AB une telle arête, elle est définie par trois points de contrôle, à savoir $P_{20} = A$, $P_{02} = B$, ses extrémités, et un point C pour P_{11} . L'arête s'écrit alors

$$P(u, v) = u^2 A + 2uvC + v^2 B, \quad (2)$$

son "milieu" est défini comme $M = P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et on a $M = \frac{A+B+2C}{4}$ avec, inversement $C = \frac{4M-A-B}{2}$, voir [10]. La tangente est la forme de Bézier 2 $\left[u \overrightarrow{CA} + v \overrightarrow{BC} \right]$. Pour $u = 0$, on est en B et la tangente est portée par \overrightarrow{BC} , pour $u = 1$, on est en A et la tangente est portée par \overrightarrow{CA} . En effet, en (u, v) la courbe va de B à A , à l'envers donc de la définition habituelle via un paramètre t (qui vaut d'ailleurs $1 - u$).

2.2 Triangle de Bézier de degré 2

On se donne six points de contrôle de \mathbb{R}^3 , notés P_{ijk} ou $P_{i,j,k}$ avec $i + j + k = 2$, la face Σ définie par, cf. [10],

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{i,j,k}^2(u, v, w) P_{i,j,k}, \quad (3)$$

où u, v, w sont les coordonnées barycentriques ($u + v + w = 1$), les $B_{i,j,k}^2$ sont les polynômes de Bernstein de degré 2 associés à un triangle, c'est-à-dire

$$B_{i,j,k}^2(u, v, w) = \frac{2!}{i!j!k!} u^i v^j w^k,$$

est un triangle de Bézier de degré 2. Les points de contrôle forment un réseau qui se représente comme :

$$\begin{array}{ccc} & P_{002} & \\ P_{101} & & P_{011} \\ P_{200} & P_{110} & P_{020} \end{array}.$$

Suivant la même représentation, les polynômes de Bernstein s'écrivent :

$$\begin{array}{ccc} & w^2 & \\ & 2uw & 2vw \\ u^2 & 2uv & v^2 \end{array}.$$

On a montré dans [10] que les éléments finis triangulaires de Lagrange de degré 2 ne sont autres que des triangles de Bézier. Dans le formalisme Bézier, l'élément est exprimé en fonction des points de contrôle, les P_{ijk} , et des polynômes de Bernstein alors que dans le formalisme élément fini, l'élément est exprimé en fonction de ses nœuds et des polynômes de base de degré 2. Le passage d'un formalisme à l'autre se fait mécaniquement en exprimant les nœuds des arêtes en fonction des points de contrôle et *vice versa*.

2.3 Tétraèdre de Bézier de degré 2

On se donne maintenant dix points de contrôle de \mathbb{R}^3 , notés P_{ijkl} ou $P_{i,j,k,l}$ avec $i + j + k + l = 2$, le "tétraèdre" Θ défini par

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=2} B_{i,j,k,l}^2(u, v, w, t) P_{i,j,k,l}, \quad (4)$$

où u, v, w, t sont les coordonnées barycentriques ($u + v + w + t = 1$), les $B_{i,j,k,l}^2$ sont les polynômes de Bernstein de degré 2 associés à un tétraèdre, c'est-à-dire

$$B_{i,j,k,l}^2(u, v, w, t) = \frac{2!}{i!j!k!l!} u^i v^j w^k t^l,$$

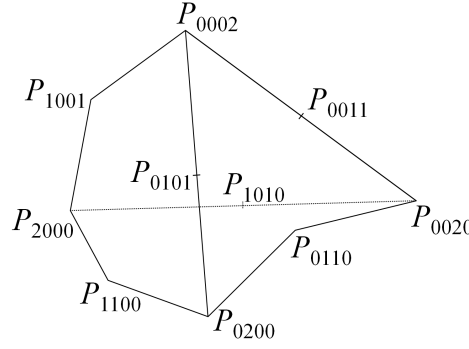


FIG. 1 – Le tétraèdre représenté via ses points de contrôle uniquement.

est un tétraèdre de Bézier de degré 2. Les points de contrôle forment le réseau que l'on imagine dans l'espace. Les faces de ce tétraèdre sont des triangles de Bézier, ses arêtes sont des courbes de Bézier, tels que vus ci-dessus. Par exemple, pour $t = 0$, on retrouve exactement la face triangulaire ci-dessus (Relation (3), en imaginant un quatrième indice fixé à zéro), c'est la face opposée à P_{0002} , autrement dit la face $P_{2000}P_{0200}P_{0020}$. Pour $w = t = 0$, on trouve, de même, l'arête $P_{2000}P_{0200}$, l'arête commune à la face $t = 0$ et à la face $w = 0$, Relation (2).

3 Élément fini tétraédrique de degré 2 ou tétraèdre P2

3.1 Définitions, notations et conventions

On suit les notations déjà utilisées pour le triangle, [10], à savoir les notations classiques des éléments finis, [6].

Les nœuds de \hat{K} . Les 4 sommets et les 6 nœuds d'arête de l'élément de référence \hat{K} , notés \hat{A}_i , sont, dans l'ordre, les suivants :

- $(0., 0., 0.), (1., 0., 0.), (0., 1., 0.), (0., 0., 1.)$
- $(0.5, 0., 0.), (0.5, 0.5, 0.), (0., 0.5, 0.)$
- $(0., 0., 0.5), (0.5, 0., 0.5), (0., 0.5, 0.5)$

Les polynômes de base. Du point de vue élément fini, ces polynômes (en variables \hat{x}, \hat{y} et \hat{z}) sont les fonctions de forme, ils s'écrivent :

- $p_1 = (1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z})$,
- $p_2 = \hat{x}(2\hat{x} - 1), p_3 = \hat{y}(2\hat{y} - 1)$,
- $p_4 = \hat{z}(2\hat{z} - 1)$,
- $p_5 = 4(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\hat{x}$,
- $p_6 = 4\hat{x}\hat{y}$,
- $p_7 = 4(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\hat{y}$,
- $p_8 = 4(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\hat{z}$,
- $p_9 = 4\hat{x}\hat{z}$,
- $p_{10} = 4\hat{y}\hat{z}$.

La transformation F_K . Par définition on a $M = F_K(\hat{M})$ avec $F_K(\hat{M}) = \sum_i q_i(\hat{M})A_i$ où les q_i sont des polynômes et les A_i sont les nœuds de l'élément K courant.

Pour un élément P2 droit on a $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,4} q_i(\hat{M})A_i$ avec pour q_i les polynômes P1, soient :

- $q_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$,
- $q_2 = \hat{x}$,
- $q_3 = \hat{y}$,
- $q_4 = \hat{z}$

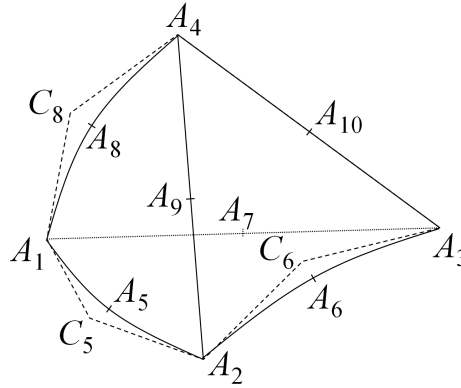


FIG. 2 – Le tétraèdre P2 avec ses nœuds et certains de ses points de contrôle, ceux associés à une arête courbe (les autres arêtes étant droites pour simplifier la figure).

et pour A_i , avec $i = 1, 4$, les 4 sommets de K .

Pour un élément P2 *isoparamétrique* on a $F_K(\hat{M}) = \sum_{i=1,10} q_i(\hat{M})A_i$ avec $q_i = p_i$ et A_i pour $i = 1, 10$ les 4 sommets puis les 6 nœuds de K .

Ces nœuds sont numérotés localement comme suit, le premier, A_5 , sur l'arête A_1A_2 , le second, A_6 , sur A_2A_3 , puis A_7 sur A_1A_3 , A_8 sur A_1A_4 , A_9 sur A_2A_4 et, enfin, A_{10} sur A_3A_4 .

Remarque : du point de vue élément fini (et non plus simplement géométrique) les polynômes de base des éléments P2 droits et P2 isoparamétriques sont les mêmes (les dix p_i).

Le jacobien de la transformation F_K . Ce jacobien permet de s'assurer de la validité des éléments et, pour certaines de ces instanciations, intervient dans les formules de quadratures utilisés pour calculer les matrices et second membres intervenant lors de la résolution éléments finis envisagée. On désigne par x_i , y_i et z_i les coordonnées du nœud A_i . On note $x_{ij} = x_j - x_i$ et de même pour y_{ij} et z_{ij} . Le jacobien² d'un tétraèdre droit est constant par élément, il vaut 6 fois son volume. En effet, la matrice des dérivées des polynômes

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

est constante d'où

$$\mathcal{J} = 6V = \text{Det} \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ z_{12} & z_{13} & z_{14} \end{pmatrix} = \langle \vec{u}_{12}, (\vec{u}_{13} \wedge \vec{u}_{14}) \rangle,$$

avec \vec{u}_{ij} le vecteur de composantes x_{ij} , y_{ij} et z_{ij} , $\langle *.* \rangle$ (ou simplement $*.*$) le produit scalaire et $(* \wedge *)$ le produit vectoriel.

Pour un élément isoparamétrique, le jacobien est fonction des coordonnées du point où il est évalué (par exemple aux nœuds de la quadrature utilisée lors des calculs ultérieurs). Pour mémoire, au point d'évaluation $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, la matrice des dérivées s'exprime comme :

$$\begin{bmatrix} -3 + 4(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) & 4\hat{x} - 1 & 0 & 0 & 4(1 - 2\hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) & \dots & \dots \\ -3 + 4(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) & 0 & 4\hat{y} - 1 & 0 & -4\hat{x} & \dots & \dots \\ -3 + 4(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) & 0 & 0 & 4\hat{z} - 1 & -4\hat{x} & \dots & \dots \\ \dots & 4\hat{y} & -4\hat{y} & -4\hat{z} & 4\hat{z} & 0 & \dots \\ \dots & 4\hat{x} & 4(1 - \hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}) & -4\hat{z} & 0 & 4\hat{z} & \dots \\ \dots & 0 & -4\hat{y} & 4(1 - \hat{x} - \hat{y} - 2\hat{z}) & 4\hat{x} & 4\hat{y} & \dots \end{bmatrix},$$

²Par abus de langage, nous parlons du jacobien pour désigner le déterminant de la matrice jacobienne.

et le jacobien, $\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, évalué en \hat{A} , est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})x_i \\ \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})y_i \\ \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})z_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})z_i & \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})z_i \end{bmatrix},$$

où les x_i, \dots sont les coordonnées des nœuds, A_i , du tétraèdre considéré. Ainsi, \mathcal{J} dépend du choix des \hat{A}_i (les nœuds d'évaluation) puis des A_i (l'élément courant). Par abus de langage, on parlera de $\mathcal{J}(A)$ pour indiquer que le nœud d'évaluation est \hat{A} , l'antécédent de A . Le volume de l'élément est défini comme la moyenne des différents jacobiens calculés. Si on note $\vec{u} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})\vec{A}_i$, $\vec{v} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})\vec{A}_i$ et $\vec{w} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial z}(\hat{A})\vec{A}_i$, le jacobien ci-dessus s'écrit également comme le produit mixte $< \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) >$, qui mesure donc le volume du tétraèdre formé par ces vecteurs au facteur 6 près.

Validité d'un élément K . Un tétraèdre P2 droit est valide si son jacobien, qui est son volume (au facteur 6), est strictement positif.

Un tétraèdre P2 isoparamétrique est valide si son jacobien est positif en tout ses points internes ou sur sa frontière. En pratique, on peut penser, *a priori*, qu'il suffit qu'il soit positif aux nœuds de la quadrature utilisée lors des calculs (quadrature que le mailleur, évidemment, ne connaît pas et qui peut changer d'une application à l'autre).

On peut également penser que si le jacobien aux 10 nœuds de K , autrement dit on choisit pour les \hat{A} les 10 nœuds de \hat{K} , alors cela suffit pour garantir la positivité cherchée. En fait, et on l'a vu déjà en deux dimension dès que le degré est supérieur à 2, cf. [10], les jacobiens à évaluer ne sont pas les 10 jacobiens des nœuds. En effet, on va montrer que l'on peut exprimer une condition suffisante de validité qui fait intervenir d'autres valeurs. Remarquons que la validité d'un élément ne préjuge pas de sa qualité (voir également plus bas).

3.2 Sur le(s) jacobien(s) du tétraèdre P2

On sait que les jacobiens qui vont effectivement nous servir ne sont pas ceux évalués aux images des nœuds de \hat{K} , néanmoins on va les calculer pour en donner une interprétation géométrique parlante. On note C_i les points de contrôle des arêtes des éléments. Au nœud \hat{A}_1 on a comme matrice des dérivées :

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donc :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= -3A_1 - A_2 + 4A_5 = -3A_1 - A_2 + A_1 + A_2 + 2C_5 = 2\overrightarrow{A_1C_5} \\ \vec{v} &= -3A_1 - A_3 + 4A_7 = -3A_1 - A_3 + A_1 + A_3 + 2C_7 = 2\overrightarrow{A_1C_7} \\ \vec{w} &= -3A_1 - A_4 + 4A_8 = -3A_1 - A_4 + A_1 + A_4 + 2C_8 = 2\overrightarrow{A_1C_8}, \end{aligned}$$

avec C_5 le contrôle milieu de l'arête A_1A_2 , C_7 celui de A_1A_3 et C_8 celui de A_1A_4 et les relations liant ces C_i aux A_i , par exemple pour le nœud A_5 , on a $A_5 = \frac{2C_5 + A_1 + A_2}{4}$. Par suite :

$$\mathcal{J}(\hat{A}_1) = 8 < \overrightarrow{A_1C_5} \cdot (\overrightarrow{A_1C_7} \wedge \overrightarrow{A_1C_8}) >, \quad (5)$$

qui est le volume (au facteur 6) du tétraèdre de sommets $[A_1, C_5, C_7, C_8]$ donc de l'élément (droit) dont les sommets sont A_1 et les trois points de contrôle des arêtes incidentes en A_1 . De même on a :

$$\mathcal{J}(\hat{A}_2) = 8 < \overrightarrow{A_2C_6} \cdot (\overrightarrow{A_2C_5} \wedge \overrightarrow{A_2C_9}) >,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_3) = 8 < \overrightarrow{A_3 C_7} \cdot (\overrightarrow{A_3 C_6} \wedge \overrightarrow{A_3 C_{10}}) >,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_4) = 8 < \overrightarrow{A_4 C_9} \cdot (\overrightarrow{A_4 C_8} \wedge \overrightarrow{A_4 C_{10}}) > .$$

Au nœud \hat{A}_5 on a comme matrice des dérivées :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

donc :

$$\overrightarrow{u} = -A_1 + A_2 = \overrightarrow{A_1 A_2}.$$

$$\overrightarrow{v} = -A_1 - A_3 - 2A_5 + 2A_6 + 2A_7,$$

$$= -A_1 - A_3 - \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} - C_5 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{2} + C_6 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} + C_7$$

$$= -A_1 - C_5 + C_6 + C_7.$$

$$\overrightarrow{w} = -A_1 - A_4 - 2A_5 + 2A_8 + 2A_9,$$

$$= -A_1 - A_4 - \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} - C_5 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_4}{2} + C_8 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_4}{2} + C_9,$$

$$= -A_1 - C_5 + C_8 + C_9.$$

Définissons les points $C_{567} = C_6 + C_7 - C_5$ et $C_{589} = C_8 + C_9 - C_5$, alors :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A_1 C_{567}},$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{A_1 C_{589}},$$

et

$$\mathcal{J}(\hat{A}_5) = < \overrightarrow{A_1 A_2} \cdot (\overrightarrow{A_1 C_{567}} \wedge \overrightarrow{A_1 C_{589}}) > . \quad (6)$$

On retrouve donc une expression analogue à celle trouvée pour le cas d'un triangle plan P2 isoparamétrique, [10]. L'arête $A_1 A_2$ appartient à deux faces et le nœud d'évaluation \hat{A}_5 contribue au jacobien au travers de ces deux faces, chacune vue comme dans le cas du triangle P2 avec le point intermédiaire correspondant. Les autres jacobiens aux nœuds des arêtes ont exactement la même forme :

$$\mathcal{J}(\hat{A}_6) = < \overrightarrow{A_2 A_3} \cdot (\overrightarrow{A_2 C_{657}} \wedge \overrightarrow{A_2 C_{6910}}) >,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_7) = < \overrightarrow{A_3 A_1} \cdot (\overrightarrow{A_3 C_{756}} \wedge \overrightarrow{A_3 C_{7810}}) >,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_8) = < \overrightarrow{A_1 A_4} \cdot (\overrightarrow{A_1 C_{859}} \wedge \overrightarrow{A_1 C_{8710}}) >,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_9) = < \overrightarrow{A_2 A_4} \cdot (\overrightarrow{A_2 C_{9610}} \wedge \overrightarrow{A_2 C_{985}}) >,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_{10}) = < \overrightarrow{A_3 A_4} \cdot (\overrightarrow{A_3 C_{1078}} \wedge \overrightarrow{A_3 C_{1096}}) > .$$

Notons que ces jacobiens peuvent être écrits comme pour le triangle P2. En effet, l'expression (6) mesure le volume du tétraèdre (virtuel) de sommet A_1, A_2, C_{567} et C_{589} , ces deux points étant obtenus par la même construction que pour le triangle (C_{567} est le quatrième sommet du parallélogramme appuyé sur C_5, C_6 et C_7 , de même pour C_{589}).

Remarque. Pour un élément droit et des nœuds milieux, ces 10 jacobiens sont égaux.

3.3 Validité d'un élément fini P2

Sans même se poser la question de sa qualité (notion à définir), le premier point à trancher est de s'assurer de la validité d'un tétraèdre P2 puis de trouver des critères permettant de la caractériser. En fait, la validité est assurée dès lors que le jacobien est strictement positif partout.

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) > 0 \text{ pour tout triplet } (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

La question est donc d'évaluer cette quantité partout (impossible en pratique) ou de trouver où l'évaluer pour garantir la bonne propriété. On peut penser, *a priori*, qu'il suffit que les dix jacobiens calculés ci-dessus soient positifs pour assurer la validité. En fait, on l'a déjà annoncé, c'est faux et l'objet de la section suivante est de le confirmer.

4 Tétraèdre P2 vu comme un tétraèdre de Bézier

Un élément fini P2 est déclaré juste si son jacobien est positif en tout point. Ci-dessus, nous avons exprimé l'expression générale du jacobien (en variable \hat{x} , \hat{y} et \hat{z}). La question est, rappelons le, de savoir où calculer ces valeurs pour qualifier l'élément. Pour répondre nous allons regarder le problème en Bézier pur. Pour ce faire, notre élément fini s'écrit selon la Relation (4), à savoir

$$\begin{aligned} M(u, v, w, t) = & u^2 P_{2000} + 2uv P_{1100} + v^2 P_{0200} + 2vw P_{0110} + w^2 P_{0020} + 2uw P_{1010} \\ & + t^2 P_{0002} + 2ut P_{1001} + 2vt P_{0101} + 2wt P_{0011} \end{aligned} \quad (7)$$

qui n'est, comme $u + v + w + t = 1$, qu'une fonction de u, v et w , notée encore θ , donc $M(u, v, w, t) = \theta(u, v, w)$.

4.1 Forme de Bézier du tétraèdre P2

On reprend $M = F_K(\hat{M})$ que l'on note $M(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = F_K(\hat{M})$ et on va montrer que $M(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ et $M(u, v, w, t)$ sont deux écritures distinctes du même tétraèdre, exprimé dans un cas via les polynômes de Bernstein et les P_{ijkl} et, dans l'autre cas, via les polynômes de base p_i ci-dessus et les nœuds A_i .

Dans [10], on a montré un résultat analogue pour le triangle en partant de la forme élément fini et en montrant qu'elle permettait de retrouver la forme de Bézier. On peut suivre la même démarche ici. Pour changer, on va partir de la forme de Bézier et retrouver la forme élément fini.

Il est clair que $P_{2000} = A_1$, en effet $P_{2000} = M(1, 0, 0, 0)$ en variables (u, v, w, t) ou $M(0, 0, 0)$ en variables $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, donc A_1 . De même, $P_{0200} = A_2$, $P_{0020} = A_3$ et $P_{0002} = A_4$. On calcule, par exemple, P_{1100} , P_{1010} et P_{1001} , il vient

$$P_{1100} = \frac{4 M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0) - P_{2000} - P_{0200}}{2}$$

et des expressions analogues pour P_{1010} et P_{1001} . Il est clair que $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0) = A_5$ puisque c'est l'image du point $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ en variable $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Par suite

$$P_{1100} = \frac{4 A_5 - A_1 - A_2}{2}$$

donc P_{1100} n'est autre que C_5 le contrôle du milieu de l'arête $A_1 A_2$. Il en est de même pour tous les autres P_{ijkl} utilisés et, par suite, $M(u, v, w, t)$ s'écrit en fait :

$$\begin{aligned} M(u, v, w, t) = & u^2 A_1 + 2uv C_5 + v^2 A_2 + 2vw C_6 + w^2 A_3 + 2uw C_7 \\ & + t^2 A_4 + 2ut C_8 + 2vt C_9 + 2wt C_{10}. \end{aligned} \quad (8)$$

Pour vérifier que $M(u, v, w, t)$ et $M(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sont identiques, on va vérifier que les polynômes p_1 et p_5 (tout comme les autres) sont cachés dans la Relation (8). Le polynôme p_5 ,

lié à A_5 , vient de la contribution de C_5 , comme $C_5 = \frac{4A_5 - A_1 - A_2}{2}$, la contribution de A_5 se résume à $4uv$. Soit $u = 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$ et $v = \hat{x}$, le polynôme est donc $4(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\hat{x}$, c'est-à-dire exactement p_5 .

Le polynôme p_1 vient de la contribution de A_1 qui comprend quatre termes, le terme en A_1 directement et les termes en C_5 , C_7 et C_8 indirectement. La contribution de A_1 est donc $u^2 + 2uv + 2uw + 2ut$, soit $u(u - v - w - t)$, comme $u = 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$, $v = \hat{x}$, $w = \hat{y}$ et $t = \hat{z}$, il vient $(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z})$ donc exactement p_1 .

La forme en F_K implique les 10 nœuds du tétraèdre, la forme de Bézier implique les 10 points de contrôle du tétraèdre. Elle va nous permettre d'établir un résultat intéressant sur son jacobien.

4.2 Le jacobien

Le jacobien, noté \mathcal{J} , est le déterminant de la matrice de la transformation élément fini, F_K , qui permet de passer d'un point de l'élément de référence, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, à M . On va calculer ce jacobien en utilisant la fonction θ , on le note alors \mathcal{J}_θ .

On a, par définition,

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_K}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial F_K}{\partial \hat{z}} \end{vmatrix},$$

tandis que

$$\mathcal{J}_\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial w} & \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{vmatrix},$$

avec le changement de variables $u = 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$, $v = \hat{x}$, $w = \hat{y}$ et $t = \hat{z}$. Soit g ce changement de variables, alors :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_\theta[dg],$$

où

$$[dg] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial u}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial u}{\partial \hat{z}} \\ \frac{\partial v}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial v}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial v}{\partial \hat{z}} \\ \frac{\partial w}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial w}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial w}{\partial \hat{z}} \\ \frac{\partial t}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial t}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial t}{\partial \hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

par suite :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial w} - \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \end{vmatrix}$$

que l'on écrit sous la forme (qui traduit un nouveau changement de variables) :

$$\mathcal{J} = (-1)^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial t} & \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial t} & \frac{\partial \theta}{\partial w} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{vmatrix},$$

qui est plus commode pour exprimer les dérivées puisque c'est θ qui est utilisé. En effet, comme $t = 1 - u - v - w$, l'Expression (7), donne directement les trois dérivées ci-dessus, on trouve, successivement :

$$2 [u(P_{2000} - P_{1001}) + v(P_{1100} - P_{0101}) + w(P_{1010} - P_{0011}) + t(P_{1001} - P_{0002})],$$

$$2 [u(P_{1100} - P_{1001}) + v(P_{0200} - P_{0101}) + w(P_{0110} - P_{0011}) + t(P_{0101} - P_{0002})]$$

et

$$2 [u(P_{1010} - P_{1001}) + v(P_{0110} - P_{0101}) + w(P_{0020} - P_{0011}) + t(P_{0011} - P_{0002})]. \quad (9)$$

Ces dérivées ont une forme générique, quelque soient le degré des éléments et la dimension de l'espace. Cette forme est donnée à la section suivante.

Le jacobien, déterminant de la matrice jacobienne, s'écrit simplement comme l'opposé du produit mixte des trois vecteurs de la Relation (9). Par suite, le théorème de Panzoult, cf. [10], s'applique et nous conduit au résultat ci-dessous.

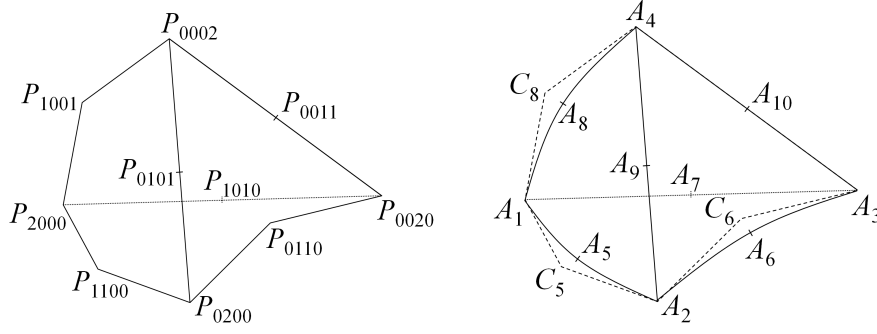


FIG. 3 – Correspondance entre les P_{ijkl} de la notation Bézier et les nœuds et points de contrôle A_i et C_i .

Théorème. \mathcal{J} , exprimé comme une fonction de u, v, w et t , est un polynôme homogène de degré 3. \square

En corollaire, le jacobien s'écrit comme une forme de Bézier.

Le polynôme est un polynôme homogène de degré 3 puisque chaque dérivée partielle est elle-même un polynôme homogène de degré 1. Il peut être exprimé comme

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=3} B_{i,j,k,l}^3(u, v, w, t) N_{i,j,k,l},$$

avec

$$B_{i,j,k,l}^3(u, v, w, t) = \frac{3!}{i!j!k!l!} u^i v^j w^k t^l.$$

Les N_{ijkl} sont au nombre de 20. Ils ne sont fonction que de vecteurs construits sur les points P_{ijkl} . Pour simplifier les notations, on retourne à la notation en A_i et C_i . Par suite, les trois vecteurs de la Relation (9) deviennent :

$$2 \left[u \overrightarrow{C_8 A_1} + v \overrightarrow{C_9 C_5} + w \overrightarrow{C_{10} C_7} + t \overrightarrow{A_4 C_8} \right]$$

$$2 \left[u \overrightarrow{C_8 C_5} + v \overrightarrow{C_9 A_2} + w \overrightarrow{C_{10} C_6} + t \overrightarrow{A_4 C_9} \right]$$

et

$$2 \left[u \overrightarrow{C_8 C_7} + v \overrightarrow{C_9 C_6} + w \overrightarrow{C_{10} A_3} + t \overrightarrow{A_4 C_{10}} \right].$$

Le terme en u^3 , donc N_{3000} , vaut

$$N_{3000} = -8 [\overrightarrow{C_8 A_1} \wedge \overrightarrow{C_8 C_5}] \cdot \overrightarrow{C_8 C_7},$$

expression dans laquelle on reconnaît le tétraèdre $[C_8 A_1 C_5 C_7]$ à l'envers donc le tétraèdre coin $[A_1 C_5 C_7 C_8]$. Par suite $N_{3000} = \mathcal{J}(\hat{A}_1)$ comme on pouvait le deviner. On a le même résultat pour N_{0300} , N_{0030} et N_{0003} qui valent respectivement $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$, $\mathcal{J}(\hat{A}_3)$ et $\mathcal{J}(\hat{A}_4)$.

Les N_{ijkl} , autres que ceux des coins, sont calculables de façon similaire. Par exemple, pour N_{2100} , le coefficient de $3u^2v$, on trouve

$$-\frac{8}{3} \left([\overrightarrow{C_8 A_1} \wedge \overrightarrow{C_8 C_5}] \cdot \overrightarrow{C_9 C_6} + [\overrightarrow{C_8 A_1} \wedge \overrightarrow{C_9 A_2}] \cdot \overrightarrow{C_8 C_7} + [\overrightarrow{C_9 C_5} \wedge \overrightarrow{C_8 C_5}] \cdot \overrightarrow{C_8 C_7} \right), \quad (10)$$

qui ne semble pas avoir d'interprétation géométrique particulière et n'est pas exprimable en fonction des $\mathcal{J}(\hat{A}_i)$ des 10 images des nœuds du tétraèdre de référence. On va néanmoins montrer que ces coefficients sont effectivement exprimables en fonction de tels $\mathcal{J}(\hat{B}_i)$, où les \hat{B}_i sont les nœuds du tétraèdre de référence P3, c'est l'objet du paragraphe qui suit.

Calcul des N_{ijkl} . On connaît l'expression générale du jacobien en variables $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, ceci permet de l'évaluer en toute position. On a aussi l'expression de ce même jacobien dans la base de Bernstein, les coefficients sont au nombre de 20, les 4 premiers sont connus (voir ci-dessus), pour trouver les autres, à défaut de les calculer à la main, un par un, on peut suivre la démarche suivante :

- définir les nœuds d'évaluation du tétraèdre de référence P3, notés \hat{B}_I , avec $\hat{B}_i = \hat{A}_i$ pour $i = 1, 4$ et \hat{B}_5 et \hat{B}_6 les nœuds de l'arête $\hat{A}_1\hat{A}_2$, etc.,
- fixer $w = t = 0$ et instancier u à $\frac{2}{3}$ puis à $\frac{1}{3}$ avec $v = 1 - u$ pour trouver les 2 N_{ij00} pour $i + j = 3$. On obtient en effet un système de deux équations en ces deux inconnues :

$$\begin{cases} \mathcal{J}(\hat{B}_5) = \frac{8N_{3000} + 12N_{2100} + 6N_{1200} + N_{0300}}{27} \\ \mathcal{J}(\hat{B}_6) = \frac{N_{3000} + 6N_{2100} + 12N_{1200} + 8N_{0300}}{27} \end{cases}.$$

On trouve donc comme solution :

$$N_{2100} = \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_5) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_6) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6},$$

$$N_{1200} = \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_1) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_5) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_6) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6},$$

avec \hat{A}_5 et \hat{A}_6 les nœuds de coordonnées $(1 - u, 0, 0)$ dans le système $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ où l'on devine les nœuds de la première arête du tétraèdre P3 de mêmes sommets que notre élément P2.

- répéter la même démarche pour les 5 autres arêtes qui sont définies de façon identique, c'est-à-dire avec deux coordonnées nulles parmi le quadruplet (u, v, w, t) .

De la sorte on connaît 16 des 20 coefficients cherchés. Pour calculer les 4 manquants, on instancie, en $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, les nœuds de calcul de coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ puis $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ et $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et enfin $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, où l'on devine les nœuds des faces du tétraèdre P3. Ceci donne un système de 4 équations à une seule inconnue (les N_{ijkl} autres que ces quatre étant maintenant connus), permettant ainsi de trouver ces inconnues. Par exemple, la première équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) &= \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3(u, v, w, t) N_{i,j,k,l} \\ &+ B_{1,1,1,0}^3(u, v, w, 0) N_{1,1,1,0} + B_{1,1,0,1}^3(u, v, 0, t) N_{1,1,0,1} \\ &+ B_{1,0,1,1}^3(u, 0, w, t) N_{1,0,1,1} + B_{0,1,1,1}^3(0, v, w, t) N_{0,1,1,1}, \end{aligned}$$

avec pour \mathcal{E} , l'ensemble des indices tels que $i + j + k + l = 3$ avec 2 ou 3 indices nuls. Mais, comme $t = 0$, cette expression se résume à :

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3(u, v, w, 0) N_{i,j,k,l} + 6uvw N_{1110},$$

soit, puisque $u = v = w = \frac{1}{3}$,

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) N_{i,j,k,l} + \frac{2N_{1110}}{9},$$

donc, on obtient finalement :

$$N_{1110} = \frac{9}{2} \left(\mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) - \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) N_{i,j,k,l} \right),$$

en fait, \mathcal{E} se réduit aux seuls indices correspondants aux coefficients de contrôle associés à la face $t = 0$, à savoir ceux associés aux 3 sommets et aux 6 nœuds d'arête de cette face³, N_{1110} est donc calculé via une combinaison linéaire comprenant dix termes. Cela donne, *in extenso*, la formule suivante :

$$N_{1110} = \frac{9}{2} \left\{ \mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) - \frac{N_{3000} + N_{0300} + N_{0030}}{27} - \frac{3(N_{2100} + N_{1200} + N_{0210} + N_{0120} + N_{1020} + N_{2010})}{27} \right\},$$

formule que l'on peut exprimer uniquement en fonction des $\mathcal{J}(\hat{B}_i)$ pour $i = 1, 10$, sauf, évidemment $i = 4$, ces nœuds étant ceux du tétraèdre de référence de degré 3. On remplace maintenant les N_{ijkl} par leurs valeurs en fonction des $\mathcal{J}(\hat{B}_i)$ et, tout calcul fait, on trouve :

$$N_{1110} = \frac{9}{2} \left\{ \mathcal{J}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \frac{2(\mathcal{J}(\hat{B}_1) + \mathcal{J}(\hat{B}_2) + \mathcal{J}(\hat{B}_3))}{27} - \frac{\mathcal{J}(\hat{B}_5) + \mathcal{J}(\hat{B}_6) + \mathcal{J}(\hat{B}_7) + \mathcal{J}(\hat{B}_8) + \mathcal{J}(\hat{B}_9) + \mathcal{J}(\hat{B}_{10})}{6} \right\}.$$

On a évidemment des relations analogues pour les 3 derniers N_{ijkl} .

Remarquons qu'utiliser des expressions comme la Relation (10) pour évaluer les N_{ijkl} nécessite 64 calculs de volume (produit mixte) alors que trouver ces valeurs par instanciations ne nécessite que 20 calculs de tel volume (et des combinaisons linéaires).

4.3 Validité d'un tétraèdre P2

On revient ici au tétraèdre P2.

On veut que $\mathcal{J}_\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=3} B_{i,j,k,l}^3(u, v, w, t) N_{i,j,k,l}$, soit positif pour tout

triplet (u, v, w) , donc pour tous les triplets $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ correspondants, ce qui, cf [10], conduit à la condition suffisante de validité : les 20 N_{ijkl} doivent être positifs. En effet

$$\min_{ijkl} N_{ijkl} \leq \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \leq \max_{ijkl} N_{ijkl}.$$

Théorème. Le tétraèdre de nœuds A_i est valide si les conditions suivantes sont vérifiées :

- quatre inégalités sur les "jacobiens des sommets", soient $\mathcal{J}(\hat{A}_i) > 0$ pour $i = 1, 4$,
- six couples de deux inégalités sur les "jacobiens des arêtes", soient, pour le premier couple $5\mathcal{J}(\hat{B}_1) - 18\mathcal{J}(\hat{B}_5) + 9\mathcal{J}(\hat{B}_6) - 2\mathcal{J}(\hat{B}_2) > 0$ et $-2\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 9\mathcal{J}(\hat{B}_5) - 18\mathcal{J}(\hat{B}_6) + 5\mathcal{J}(\hat{B}_2) > 0$,
- quatre inégalités sur les coefficients de contrôle des faces,

où les \hat{B}_i sont les nœuds du tétraèdre de référence de degré 3 (avec $\hat{B}_i = \hat{A}_i$, pour $i = 1, 4$).

□

Si le minimum des N_{ijk} est atteint en l'un des quatre premiers \hat{B}_i , la condition est nécessaire, sinon, elle est suffisante mais trop forte. On note également qu'il peut exister des N_{ijkl} négatifs alors que le jacobien est bien positif. Cela signifie que l'on peut, au prix de calculs supplémentaires, affiner la condition suffisante.

³Il est facile de vérifier que $1 - \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{E}} B_{i,j,k,l}^3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \frac{2}{9}$, ce qui est rassurant.

Affiner la condition de validité, méthode 1. Dans le cas où un coefficient est négatif et ses "voisins" sont positifs, on peut espérer qu'en affinant le calcul on peut, dans certains cas, montrer que la solution est en réalité satisfaisante. Un cas vraisemblable où l'on peut espérer une telle réponse est le cas où tous les jacobiens évalués sont positifs et un (ou plusieurs) N_{ijkl} est (sont) négatif(s).

Une méthode simple (mais coûteuse) consiste à découper le tétraèdre incriminé en huit et à recalculer le critère pour les éléments du découpage.

Affiner la condition de validité, méthode 2. Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, une méthode plus élégante (et moins coûteuse) peut être utilisée qui porte sur une manipulation du polynôme $\mathcal{J}_\theta(u, v, w, t)$.

Pour en saisir facilement le principe, on regarde le cas simple d'un polynôme de degré 2 en u et v (avec $u + v = 1$ et $u \in [0, 1]$),

$$P(u, v) = u^2 N_{20} + 2uv N_{11} + v^2 N_{02},$$

en supposant que N_{20}, N_{02} et $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sont positifs tandis que N_{11} est négatif. Posant $K_{20}^1 = N_{20}$, $K_{11}^1 = \frac{N_{20} + N_{11}}{2}$ et $K_{02}^1 = P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on définit le polynôme (avec $u + v = 1$ et $u \in [0, 1]$) :

$$Q_1(u, v) = u^2 K_{20}^1 + 2uv K_{11}^1 + v^2 K_{02}^1.$$

Il est évident que ces deux polynômes sont identiques ($u \in [0, 1]$ pour Q_1 et $u \in [0, \frac{1}{2}]$ pour P) et que la condition de validité s'écrit maintenant K_{11}^1 positif, ce qui est donc moins restrictif que la condition initiale puisque $K_{11}^1 = \frac{N_{20} + N_{11}}{2}$ et que N_{20} est positif.

De même, on construit un polynôme Q_2 en posant maintenant $K_{20}^2 = P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $K_{11}^2 = \frac{N_{02} + N_{11}}{2}$ et $K_{02}^2 = N_{02}$, on a :

$$Q_2(u, v) = u^2 K_{20}^2 + 2uv K_{11}^2 + v^2 K_{02}^2$$

et Q_2 est identique à P ($u \in [0, 1]$ pour Q_2 et $u \in [\frac{1}{2}, 1]$ pour P). Imposer K_{11}^2 positif est donc moins restrictif puisque N_{02} est positif.

L'idée est donc d'appliquer cette méthode pour notre cas, à savoir un polynôme de degré 3. Le polynôme que l'on regarde s'écrit

$$\begin{aligned} P(u, v, w) = & u^3 N_{300} + 3u^2 v N_{210} + 3uv^2 N_{120} + v^3 N_{030} + 3v^2 w N_{021} + 3vw^2 N_{012} + w^3 N_{003} \\ & + 3uw^2 N_{102} + 3u^2 w N_{201} + 6uvw N_{111}. \end{aligned}$$

On trouve deux cas, le coefficient de contrôle négatif est N_{111} ou l'un des coefficients N_{ijk} avec i ou j ou k nul et chacun de ces indices différent de 3.

- $N_{111} \leq 0$.

On utilise l'algorithme de De Casteljau pour définir successivement les coefficients de la subdivision cherchée qui correspond à $u = v = w = \frac{1}{3}$. En premier, on trouve, au rang un :

$$\begin{aligned} N_{300}^1 &= \frac{N_{300} + N_{210} + N_{201}}{3} \\ N_{210}^1 &= \frac{N_{210} + N_{120} + N_{111}}{3} \\ N_{120}^1 &= \frac{N_{120} + N_{030} + N_{021}}{3} \\ N_{201}^1 &= \frac{N_{201} + N_{111} + N_{102}}{3} \\ N_{111}^1 &= \frac{N_{111} + N_{021} + N_{012}}{3} \\ N_{102}^1 &= \frac{N_{102} + N_{012} + N_{003}}{3}, \end{aligned}$$

puis, au rang deux :

$$\begin{aligned} N_{300}^2 &= \frac{N_{300}^1 + N_{210}^1 + N_{201}^1}{3} \\ N_{210}^2 &= \frac{N_{210}^1 + N_{120}^1 + N_{111}^1}{3} \\ N_{201}^2 &= \frac{N_{201}^1 + N_{111}^1 + N_{102}^1}{3} \end{aligned}$$

et la condition N_{111} positif est remplacée par la condition de positivité de ces neuf coefficients dont certains sont mécaniquement positifs si seul N_{111} est négatif.

En pratique, on évalue le polynôme en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, si cette valeur est positive, on vérifie la positivité des coefficients ci-dessus.

- $N_{210} \leq 0$, par exemple.

Pour ce coefficient particulier, la subdivision est définie par $u = v = \frac{1}{2}$ et $w = 0$. On utilise la même méthode que ci-dessus appliquée à la courbe $w = t = 0$, en construisant, au rang un :

$$\begin{aligned} N_{300}^1 &= \frac{N_{300} + N_{210}}{2} \\ N_{210}^1 &= \frac{N_{210} + N_{120}}{2} \\ N_{120}^1 &= \frac{N_{120} + N_{030}}{2} \end{aligned}$$

puis, au rang deux :

$$\begin{aligned} N_{300}^2 &= \frac{N_{300}^1 + N_{210}^1}{2} \\ N_{210}^2 &= \frac{N_{210}^1 + N_{120}^1}{2} \end{aligned}$$

et la condition N_{210} positif est remplacée par la condition de positivité de ces cinq coefficients dont certains sont mécaniquement positifs si seul N_{210} est négatif.

En pratique, on évalue le polynôme en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, si cette valeur est positive, on vérifie la positivité des coefficients ci-dessus.

Voir l'Annexe 3 pour les coefficients de subdivision dans le cas des faces d'un tétraèdre P2. À noter qu'il serait possible d'itérer pour affiner encore les conditions.

Une remarque sur le raffinement. Affiner la condition de validité peut avoir temporairement un effet pervers. En effet, les conditions initiales (avec les N_{ijkl} initiaux) sont très contraignantes et peuvent conduire à déclarer faux un maillage juste ce qui amène à optimiser ce maillage pour le redresser. Le résultat est que le maillage final est meilleur. *A contrario*, trouver juste le maillage après avoir affiné la condition fait qu'il n'est pas redressé donc pas optimisé à ce stade, augmentant ainsi le travail de la phase d'optimisation contenue, de toute façon, dans le mailleur.

Interprétation de $\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \mathcal{J}_\theta(u, v, w, t)$. Si on définit comme surface Σ l'ensemble des points $M = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}))$, on obtient une cubique (mais pas une Bézier) et la condition de validité indique que cette surface (de \mathbb{R}^4) doit être au dessus du plan $\hat{t} = 0$.

4.4 Éléments tétraédriques non valides

Un tétraèdre est non valide si au moins un jacobien est négatif ou nul en un point d'évaluation (et pas seulement en ses nœuds). Nous pensons que cela signifie que l'élément est retourné ou qu'au moins l'une de ses faces est fautive. Si une telle face existe, elle est auto-intersectante (deux arêtes de la face se coupent) si elle est plane ou auto-intersectante après projection dans le cas non plan (deux arêtes de la face se recouvrent). Un autre cas de face fautive est quand elle possède deux arêtes auto-tangentes.

Remarquons qu'il existe des tétraèdres P2 courbes justes alors que leur volume P1 est nul (les quatre sommets sont coplanaires) voire négatif.

5 Le simplexe de dimension et de degré quelconque

Dans cette section, le théorème développé précédemment en trois dimension et pour le degré deux est généralisé. En dimension 3 et pour le degré 2, l'élément s'écrit comme vu à la Relation (4), à savoir

$$\theta(u, v, w, t) = \sum_{i+j+k+l=2} B_{i,j,k,l}^2(u, v, w, t) P_{i,j,k,l},$$

que l'on peut écrire,

$$\theta(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=2} B_{\mathbf{i}}^2(\mathbf{u}) P_{\mathbf{i}},$$

avec les notations génériques suivantes⁴ : \mathbf{u} est le quadruplet (u_1, u_2, u_3, u_4) , \mathbf{i} est le quadruplet (i_1, i_2, i_3, i_4) et $|\mathbf{i}| = \sum_{j=1,4} i_j$. Ceci permet d'écrire, en dimension dim et pour le degré d , l'expression générique d'un carreau simplicial quelconque.

5.1 Carreau quelconque, dérivées partielles et jacobien

On donne ici l'écriture générique d'un carreau, on exprime ses dérivées, son jacobien et les "points" de contrôle de celui-ci.

Écriture générique d'un carreau quelconque. Le carreau de degré d dans l'espace de dimension dim est de la forme :

$$\theta(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=d} B_{\mathbf{i}}^d(\mathbf{u}) P_{\mathbf{i}}, \quad (11)$$

avec $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{dim+1})$ et $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{dim+1})$, $B_{\mathbf{i}}^d$ le polynôme de Bernstein de degré d en les variables u_j , dont la somme est égale à 1, [7], [8]. Par ailleurs, les $P_{\mathbf{i}}$ sont les points de contrôle de \mathbb{R}^{dim} indicés en les indices i_j contenus dans \mathbf{i} . Rappelons que :

$$B_{\mathbf{i}}^d(\mathbf{u}) = \frac{d!}{\prod_{1 \leq j \leq dim+1} i_j!} \prod_{1 \leq j \leq dim+1} u_j^{i_j}.$$

Les dérivées partielles. On donne ici la forme générale d'une dérivée partielle, par exemple, la k ième, donc par rapport à u_k . Pour les polynômes de Bernstein on a :

$$\frac{\partial B_{\mathbf{i}}^d(\mathbf{u})}{\partial u_k} = \sum_{|\mathbf{i}|=d, i_k \neq 0} \frac{d(d-1)!}{(i_k-1)! \prod_{j \neq k} i_j!} u_k^{i_k-1} \prod_{j \neq k} u_j^{i_j},$$

soit encore, en réarrangeant les termes,

$$d \sum_{|\mathbf{i}|=d-1} \frac{(d-1)!}{\prod_j i_j!} \prod_j u_j^{i_j}.$$

On obtient finalement pour θ :

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{u})}{\partial u_k} = d \sum_{|\mathbf{i}|=d-1} B_{\mathbf{i}}^{d-1}(\mathbf{u}) P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}, \quad (12)$$

avec $\mathbf{e}_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 étant à la position k de ce $(dim+1)$ -uplet. Autrement dit, l'indice k de $\mathbf{i} + \mathbf{e}_k$ est $i_k + 1$.

⁴Les multiplats (d'indices ou de variables) sont écrits en **gras**.

Le jacobien. Le jacobien, noté $\mathcal{J}_F(\hat{\mathbf{x}})$, est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation élément fini qui permet de passer de $\hat{\mathbf{x}}$ à M . Pour un élément droit, ce jacobien est constant, pour un élément courbe, il dépend effectivement de $\hat{\mathbf{x}}$, le nœud d'évaluation. On utilise la fonction θ pour calculer ce jacobien et on a :

$$\mathcal{J}_F(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{J}_\theta(1 - \sum_{2 \leq j \leq \dim+1} u_j, u_2, \dots, u_{\dim+1}),$$

on peut remarquer que :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_\theta(1 - \sum_{2 \leq j \leq \dim+1} u_j, u_2, \dots, u_{\dim+1}) = (-1)^{\dim} \mathcal{J}_\theta(u_1, u_2, \dots, u_{\dim}, 1 - \sum_{1 \leq j \leq \dim} u_j).$$

La k ème colonne c_k de $\mathcal{J}_\theta(u_1, u_2, \dots, u_{\dim}, 1 - \sum_{1 \leq j \leq \dim} u_j)$ est définie par :

$$c_k = \frac{\partial \theta}{\partial u_k} - \frac{\partial \theta}{\partial u_{\dim+1}}.$$

En remplaçant ces quantités par leurs expressions, on trouve leurs valeurs en fonction des polynômes de Bernstein et des points de contrôle. Il vient :

$$c_k = d \sum_{|\mathbf{i}|=d-1} B_{\mathbf{i}}^{d-1}(\mathbf{u}) [P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_k} - P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_{\dim+1}}],$$

que l'on écrit finalement comme :

$$c_k = d \sum_{|\mathbf{i}|=d-1} B_{\mathbf{i}}^{d-1}(\mathbf{u}) \Delta^{\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}, \quad (13)$$

avec la notation $\Delta^{\mathbf{j}}$ définie comme $\Delta^{\mathbf{j}} P_{\mathbf{i}} = P_{\mathbf{i}} - P_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}$, pour $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_{\dim+1})$. Ainsi, ici, $\Delta^{\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}$ n'est autre que $P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_k} - P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_{\dim+1}}$. Cette formule montre qu'un simple jeu d'indices suffit pour obtenir telle ou telle dérivée partielle sans faire explicitement de dérivation. On connaît de cette façon tous les coefficients de la matrice jacobienne de F . Le jacobien cherché a la forme suivante :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \left| \left(\sum_{|\mathbf{i}|=d-1} B_{\mathbf{i}}^{d-1}(\mathbf{u}) \Delta^{\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_k} \right)_{1 \leq k \leq \dim} \right|, \quad (14)$$

c'est le déterminant de la matrice dont les colonnes (indice k) sont ces expressions. On va montrer que ce déterminant s'écrit comme un polynôme homogène de degré $q = \dim \times (d-1)$ sous la forme classique :

$$\mathcal{J} = \sum_{|\mathbf{i}|=q} B_{\mathbf{i}}^q(\mathbf{u}) N_{\mathbf{i}}, \quad (15)$$

où les $N_{\mathbf{i}}$, qui sont des coefficients de contrôle et l'indice \mathbf{i} vont être explicités ci-dessous.

Les "points" de contrôle. On part de l'Expression (14) et on sort la sommation, il vient :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{|\mathbf{i}^\alpha|=d-1, 1 \leq \alpha \leq \dim} \left| (B_{\mathbf{i}^\alpha}^{d-1}(\mathbf{u}) \Delta^{\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^\alpha + \mathbf{e}_k})_{1 \leq k \leq \dim} \right|,$$

où \mathbf{i}^α est un $(\dim + 1)$ -uplet, de tels multiuplets étant au nombre de \dim , la dimension de l'espace (le nombre de variables de l'espace des paramètres) avec, pour chacun, $|\mathbf{i}^\alpha| = d-1$. On sort maintenant les polynômes de Bernstein du déterminant. On trouve :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{|\mathbf{i}^\alpha|=d-1, 1 \leq \alpha \leq \dim} \left[\left| (\Delta^{\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^\alpha + \mathbf{e}_k})_{1 \leq k \leq \dim} \right| \prod_{1 \leq \alpha \leq \dim} B_{\mathbf{i}^\alpha}^{d-1}(\mathbf{u}) \right]. \quad (16)$$

Le produit des polynômes peut s'exprimer, à un coefficient près (que l'on va faire rentrer dans les termes Δ pour retrouver la forme canonique), comme un polynôme de Bernstein de degré $q = \dim \times (d - 1)$, les points de contrôle N cherchés étant calculés à partir des différents Δ et de ces coefficients. On écrit l'expression ci-dessus sous la forme plus explicite suivante :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{(\mathbf{i}^1, \dots, \mathbf{i}^{\dim}), |\mathbf{i}^\alpha| = d-1} \left[\Delta^{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^1 + \mathbf{e}_1} \dots \Delta^{\mathbf{e}_{\dim} - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^{\dim} + \mathbf{e}_{\dim}} \mid \prod_{1 \leq \beta \leq \dim} B_{\mathbf{i}^\beta}^{d-1}(\mathbf{u}) \right].$$

Posant $M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \dots, \mathbf{i}^{\dim}}$ le déterminant présent dans cette expression, c'est-à-dire :

$$M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \dots, \mathbf{i}^{\dim}} = \left| \Delta^{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^1 + \mathbf{e}_1} \dots \Delta^{\mathbf{e}_{\dim} - \mathbf{e}_{\dim+1}} P_{\mathbf{i}^{\dim} + \mathbf{e}_{\dim}} \right|,$$

on a :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \dots, \mathbf{i}^{\dim}), |\mathbf{i}^\alpha| = d-1} \left[M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \dots, \mathbf{i}^{\dim}} \prod_{1 \leq \beta \leq \dim} B_{\mathbf{i}^\beta}^{d-1}(\mathbf{u}) \right].$$

Comme le produit d'un $B_{\mathbf{i}}^{d-1}$ par un $B_{\mathbf{j}}^{d-1}$ donne, à un facteur près, un monôme du même degré que celui de $B_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}^{2(d-1)}$, on introduit l'indice $\mathbf{I} = \sum_{1 \leq \beta \leq \dim} \mathbf{i}^\beta$, tel que $|\mathbf{I}| = q$ et le coefficient

K précisé ci-après pour pouvoir écrire notre relation comme :

$$\mathcal{J} = (-d)^{\dim} \sum_{|\mathbf{I}|=q} \left[\sum_{(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \dots, \mathbf{i}^{\dim}), \sum \mathbf{i}^\beta = \mathbf{I}} [K M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \dots, \mathbf{i}^{\dim}}] \right] B_{\mathbf{I}}^q(\mathbf{u}),$$

avec

$$K = \frac{\prod_{1 \leq \beta \leq \dim} K_{\mathbf{i}^\beta}^{(d-1)}}{K_{\mathbf{I}}^{(q)}},$$

où

$$K_{\mathbf{i}}^{(d-1)} = \frac{(d-1)!}{\prod_{1 \leq k \leq \dim+1} i_k!} \quad \text{et} \quad K_{\mathbf{I}}^{(q)} = \frac{q!}{\prod_{1 \leq k \leq \dim+1} I_k!},$$

que l'on note, par la suite, en omettant les exposants (q) et $(d-1)$ sachant repérer via l'indice en \mathbf{I} s'il s'agit de (q) ou en \mathbf{i} s'il s'agit de $(d-1)$. Ceci donne l'expression cherchée pour les N_I , à savoir :

$$N_{\mathbf{I}} = \frac{(-d)^{\dim}}{K_{\mathbf{I}}} \sum_{(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \dots, \mathbf{i}^{\dim}), \sum \mathbf{i}^\beta = \mathbf{I}} \left(\prod_{1 \leq \beta \leq \dim} K_{\mathbf{i}^\beta} \right) M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \dots, \mathbf{i}^{\dim}}. \quad (17)$$

ce qui conclut ce calcul. En pratique, on cherche les \dim indices \mathbf{i}^β , avec $|\mathbf{i}^\beta| = d-1$, qui contribuent puis on forme les combinaisons de ces indices pour obtenir une somme égale à \mathbf{I} , le nombre de ces combinaisons donnant le nombre de termes (de déterminants) de la somme, ces termes, à leur tour, indiquant les points de contrôle à utiliser.

Dans la suite, en instanciant quelques cas, on va vérifier l'exactitude de cette formule et en comprendre plus intuitivement le mécanisme.

5.2 Validation sur le triangle P2

On vérifie, en sens inverse, en instanciant \dim à 2 et d à 2, donc $q = 2$, que les expressions générales redonnent bien ce que l'on a trouvé en faisant ce cas particulier directement à la main dans [10].

Dérivées partielles. On écrit (13) en reprenant les notations à plusieurs indices de ce cas et on regarde la première dérivée partielle, $k = 1$. On a, $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $\mathbf{i} = (i, j, k)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ et enfin $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Par suite $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 = (1, 0, -1)$ est l'exposant de Δ , tandis que l'indice $\mathbf{i} + \mathbf{e}_k$ vaut $(i + 1, j, k)$. Alors la dérivée s'écrit, *sans réfléchir*, en trois temps, d'abord :

$$2 [u(P_{100} - P_{100}) + v(P_{010} - P_{010}) + w(P_{001} - P_{001})] ,$$

en mettant simplement l'indice $_{100}$ pour les coefficients de u , $_{010}$ pour ceux de v , etc. Notons que cette expression est purement formelle, elle n'a pas, pour l'instant, de signification précise. Ensuite, on incrémente de 1 le premier indice de chaque premier P puisque c'est la première dérivée partielle que nous considérons, ceci donne :

$$2 [u(P_{200} - P_{100}) + v(P_{110} - P_{010}) + w(P_{101} - P_{001})] ,$$

puis, pour finir, on incrémente de 1 le dernier indice de chaque P en seconde position :

$$2 [u(P_{200} - P_{101}) + v(P_{110} - P_{011}) + w(P_{101} - P_{002})] ,$$

et le tour est joué, c'est bien la première dérivée partielle comme vue dans [10].

Les "points" de contrôle N_{ijk} . On part de la Relation (17) pour retrouver les N_{ijk} de la dimension 2 et du degré 2, donc $\dim = d = q = 2$. On a $\mathbf{I} = (I, J, K)$, $\mathbf{i}^1 = (i^1, j^1, k^1)$ et $\mathbf{i}^2 = (i^2, j^2, k^2)$, les deux instanciations à utiliser.

Les N_{ijk} forment le réseau suivant :

$$\begin{array}{c} N_{002} \\ N_{101} \quad N_{011} \\ N_{200} \quad N_{110} \quad N_{020} , \end{array}$$

il y a donc deux types de tels coefficients, ceux relatifs aux 3 coins et ceux relatifs aux trois "milieux" d'arêtes. On va simplement exhiber un coefficient de chaque type, soient N_{200} et N_{110} , les autres s'en déduisant par manipulation des indices.

- Calcul de N_{200} .

Cherchons le coefficient de contrôle N_{200} , $I = 2, J = K = 0$, donc la somme

$$N_{200} = \frac{2^2}{K_{\mathbf{I}}} \sum_{(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2), \mathbf{i}^1 + \mathbf{i}^2 = \mathbf{I}} \left(\prod_{\beta=1, \dim} K_{\mathbf{i}^\beta} \right) M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2},$$

comme $I = 2$, contient un seul terme qui correspond aux deux indices $\mathbf{i}^1 = (1, 0, 0)$ et $\mathbf{i}^2 = (1, 0, 0)$ également. Il vient :

$$N_{200} = \frac{2^2}{K_{200}} K_{100} K_{100} M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2}.$$

On a $K_{200} = \frac{2!}{2!0!0!} = 1$ et $K_{100} = \frac{1!}{1!} = 1$, par suite : $N_{200} = 4 M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2}$. Il reste à trouver la valeur de ce déterminant. On repart de sa définition, ici,

$$M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} = \left| \Delta^{\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}_3} P_{\mathbf{i}^1 + \mathbf{e}_1} \quad \Delta^{\mathbf{e}^2 - \mathbf{e}_3} P_{\mathbf{i}^2 + \mathbf{e}_2} \right| ,$$

soit

$$M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} = \left| \Delta^{1,0,-1} P_{200} \quad \Delta^{0,1,-1} P_{110} \right| ,$$

qui s'interprète comme le produit vectoriel du vecteur $\Delta^{1,0,-1} P_{200}$ par le vecteur $\Delta^{0,1,-1} P_{110}$, donc :

$$N_{200} = 4 \left| \Delta^{1,0,-1} P_{200} \quad \Delta^{0,1,-1} P_{110} \right| .$$

à savoir exactement le résultat montré, à la main, dans [10]. N_{200} est la surface signée (au facteur 8 près) du triangle formée par le sommet A_1 et les deux points de contrôle incidents, C_4 et C_6 .

- Calcul de N_{110} .

On regarde maintenant un coefficient moins trivial, par exemple N_{110} . Les termes contribuant proviennent des indices $\mathbf{i}^1 = (1, 0, 0)$ et $\mathbf{i}^2 = (0, 1, 0)$ uniquement. La somme comprend donc deux termes et s'écrit :

$$N_{110} = \frac{2^2}{K_{\mathbf{I}}} (K_{100}K_{010}M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} + K_{010}K_{100}M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1}),$$

comme $K_{110} = 2$, $K_{100} = 1$ et $K_{010} = 1$, il reste

$$N_{110} = 2 (M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} + M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1}),$$

il reste donc à expliciter ces deux déterminants. Comme

$$M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} = \begin{vmatrix} \Delta^{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3} P_{\mathbf{i}^1 + \mathbf{e}_1} & \Delta^{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3} P_{\mathbf{i}^2 + \mathbf{e}_2} \end{vmatrix},$$

il vient

$$M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} = \begin{vmatrix} \Delta^{1,0,-1} P_{200} & \Delta^{0,1,-1} P_{020} \end{vmatrix},$$

et

$$M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1} = \begin{vmatrix} \Delta^{1,0,-1} P_{110} & \Delta^{0,1,-1} P_{110} \end{vmatrix},$$

et on retrouve l'expression calculée à la main dans [10] pour N_{110} . N_{110} fait intervenir, comme points de contrôle, les points qui sont incidents à A_4 (ou C_4).

5.3 Validation sur le tétraèdre P2

On revient maintenant sur le cas d'un tétraèdre de degré deux en trois dimension, $\dim = 3$, $d = 2$ et $q = 3$.

Dérivées partielles. Retrouvons, en effet, et de manière complètement mécanique, la première des Relations (9), donc pour $k = 1$.

On écrit (13) en reprenant les notations à plusieurs indices, $\mathbf{u} = (u, v, w, t)$, $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ et enfin $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Par suite $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4 = (1, 0, 0, -1)$ est l'exposant de Δ , tandis que l'indice $\mathbf{i} + \mathbf{e}_k$ vaut $(i + 1, j, k, l)$. Alors la dérivée s'écrit sans réfléchir en trois temps, d'abord :

$$2 [u(P_{1000} - P_{1000}) + v(P_{0100} - P_{0100}) + w(P_{0010} - P_{0010}) + t(P_{0001} - P_{0001})],$$

en mettant simplement l'indice 1000 pour les coefficients de u , 0100 pour ceux de v , etc. Notons que cette expression est purement mécanique. Ensuite, on incrémente de 1 le premier indice de chaque premier P puisque c'est la première dérivée partielle que nous considérons, ceci donne :

$$2 [u(P_{2000} - P_{1000}) + v(P_{1100} - P_{0100}) + w(P_{1010} - P_{0010}) + t(P_{1001} - P_{0001})],$$

puis, pour finir, on incrémente de 1 le dernier indice de chaque P en seconde position :

$$2 [u(P_{2000} - P_{1001}) + v(P_{1100} - P_{0101}) + w(P_{1010} - P_{0011}) + t(P_{1001} - P_{0002})],$$

et c'est bien la première ligne de (9).

il vient, successivement, les trois termes cherchés :

$$M_{i^1, i^2, i^3} = \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{i^1+e_1} & \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{i^2+e_2} & \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{i^3+e_3} \end{vmatrix},$$

soit

$$\begin{aligned} M_{i^1, i^2, i^3} &= \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{2000} & \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{1100} & \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{0110} \end{vmatrix}, \\ &= |(P_{2000} - P_{1001}) \quad (P_{1100} - P_{1001}) \quad (P_{0110} - P_{0101})|, \\ &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{C_8 A_1} & \overrightarrow{C_8 C_5} & \overrightarrow{C_9 C_6} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

puis,

$$M_{i^1, i^3, i^2} = \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{i^1+e_1} & \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{i^3+e_2} & \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{i^2+e_3} \end{vmatrix},$$

soit

$$\begin{aligned} M_{i^1, i^3, i^2} &= \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{2000} & \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{0200} & \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{1010} \end{vmatrix}, \\ &= |(P_{2000} - P_{1001}) \quad (P_{0200} - P_{0101}) \quad (P_{1010} - P_{1001})|, \\ &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{C_8 A_1} & \overrightarrow{C_9 A_2} & \overrightarrow{C_8 C_7} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

et, enfin

$$M_{i^3, i^1, i^2} = \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{i^3+e_1} & \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{i^1+e_2} & \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{i^2+e_3} \end{vmatrix},$$

soit

$$\begin{aligned} M_{i^3, i^1, i^2} &= \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{1100} & \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{1100} & \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{1010} \end{vmatrix}, \\ &= |(P_{1100} - P_{0101}) \quad (P_{1100} - P_{1001}) \quad (P_{1010} - P_{1001})|, \\ &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{C_9 C_5} & \overrightarrow{C_8 C_5} & \overrightarrow{C_8 C_7} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

en conclusion, on retrouve le résultat établi à la main plus haut, c'est-à-dire la Relation (10) en retournant à la Figure (3) pour vérifier la correspondance entre les P_{ijkl} et les A_i et C_i .

• Calcul de N_{1110} .

Cherchons le coefficient de contrôle N_{1110} , $I = J = K = 1, L = 0$. Les termes contribuant proviennent des indices $i^1 = (1, 0, 0, 0)$, $i^2 = (0, 1, 0, 0)$ et $i^3 = (0, 0, 1, 0)$ uniquement. La somme comprend donc six termes correspondants aux triplets (i^1, i^2, i^3) , (i^1, i^3, i^2) , (i^2, i^1, i^3) , (i^2, i^3, i^1) , (i^3, i^1, i^2) et (i^3, i^2, i^1) . Alors

$$\begin{aligned} N_{1110} &= -\frac{2^3}{K_{1110}} (K_{1000} K_{0100} K_{0010} M_{i^1, i^2, i^3} + K_{1000} K_{0010} K_{0100} M_{i^1, i^3, i^2} \\ &\quad + K_{0100} K_{1000} K_{0010} M_{i^2, i^1, i^3} + K_{0100} K_{0010} K_{1000} M_{i^2, i^3, i^1} \\ &\quad + K_{0010} K_{1000} K_{0100} M_{i^3, i^1, i^2} + K_{0010} K_{0100} K_{1000} M_{i^3, i^2, i^1}), \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned} N_{1110} &= -\frac{8}{6} (M_{i^1, i^2, i^3} + M_{i^1, i^3, i^2} + M_{i^2, i^1, i^3} \\ &\quad + M_{i^2, i^3, i^1} + M_{i^3, i^1, i^2} + M_{i^3, i^2, i^1}), \end{aligned}$$

il reste à évaluer ces six déterminants à partir de leur expression générale (vue plus haut), à savoir :

$$M_{i^1, i^2, i^3} = \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{i^1+e_1} & \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{i^2+e_2} & \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{i^3+e_3} \end{vmatrix}.$$

Les six termes sont donc, successivement :

$$M_{i^1, i^2, i^3} = \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{2000} & \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{0200} & \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{0020} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^3, \mathbf{i}^2} &= \left| \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{2000} \quad \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{0110} \quad \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{0110} \right|, \\
M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1, \mathbf{i}^3} &= \left| \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{1100} \quad \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{1100} \quad \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{0020} \right|, \\
M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3, \mathbf{i}^1} &= \left| \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{1100} \quad \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{0110} \quad \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{1010} \right|, \\
M_{\mathbf{i}^3, \mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} &= \left| \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{1010} \quad \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{1100} \quad \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{0110} \right|, \\
M_{\mathbf{i}^3, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1} &= \left| \Delta^{(1,0,0,-1)} P_{1010} \quad \Delta^{(0,1,0,-1)} P_{0200} \quad \Delta^{(0,0,1,-1)} P_{1010} \right|,
\end{aligned}$$

soit, pour finir, on trouve successivement :

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3} &= |(P_{2000} - P_{1001}) \quad (P_{0200} - P_{0101}) \quad (P_{0020} - P_{0011})|, \\
M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^3, \mathbf{i}^2} &= |(P_{2000} - P_{1001}) \quad (P_{0110} - P_{0011}) \quad (P_{0110} - P_{0101})|, \\
M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1, \mathbf{i}^3} &= |(P_{1100} - P_{0101}) \quad (P_{1100} - P_{1001}) \quad (P_{0020} - P_{0011})|, \\
M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3, \mathbf{i}^1} &= |(P_{1100} - P_{0101}) \quad (P_{0110} - P_{0011}) \quad (P_{1010} - P_{1001})|, \\
M_{\mathbf{i}^3, \mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} &= |(P_{1010} - P_{0011}) \quad (P_{1100} - P_{1001}) \quad (P_{0110} - P_{0101})|, \\
M_{\mathbf{i}^3, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1} &= |(P_{1010} - P_{0011}) \quad (P_{0200} - P_{0101}) \quad (P_{1010} - P_{1001})|.
\end{aligned}$$

Par exemple, en fonction des A_i et C_i , on a :

$$M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2, \mathbf{i}^3} = \left| \overrightarrow{C_8 A_1} \quad \overrightarrow{C_9 A_2} \quad \overrightarrow{C_{10} A_3} \right|.$$

En conclusion, bon courage. Le calcul des N_{ijkl} demande le calcul de 64 produits mixtes (un par sommet soit 4 au total, trois par nœud d'arête, soit 36 au total et six par face, soit 24 au total).

5.4 Instanciations pour le triangle P3

Pour cet exercice, on reprend le cas d'un triangle de degré trois en deux dimension, $\dim = 2$, $d = 3$.

Dérivées partielles. On refait de manière complètement mécanique ce que l'on a fait ci-dessus pour trouver la dérivée partielle par rapport à u , donc pour $k = 1$.

On écrit donc (13) en reprenant les notations à plusieurs indices, $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $\mathbf{i} = (i, j, k)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ et enfin $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Par suite $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 = (1, 0, -1)$ est l'exposant de Δ , tandis que l'indice $\mathbf{i} + \mathbf{e}_k$ vaut $(i + 1, j, k)$. Alors la dérivée s'écrit sans réfléchir en trois temps, d'abord :

$$\begin{aligned}
&3 [u^2(P_{200} - P_{200}) + 2uv(P_{110} - P_{110}) + v^2(P_{020} - P_{020}) \\
&+ 2vw(P_{011} - P_{011}) + w^2(P_{002} - P_{002}) + 2uw(P_{101} - P_{101})],
\end{aligned}$$

en mettant simplement comme indice les exposants des monômes (cette expression n'ayant pas de sens pour l'instant). Ensuite, on incrémente de 1 le premier indice de chaque premier P puisque c'est la première dérivée partielle que nous considérons, ceci donne :

$$\begin{aligned}
&3 [u^2(P_{300} - P_{200}) + 2uv(P_{210} - P_{110}) + v^2(P_{120} - P_{020}) \\
&+ 2vw(P_{111} - P_{011}) + w^2(P_{102} - P_{002}) + 2uw(P_{201} - P_{101})],
\end{aligned}$$

puis, pour finir, on incrémente de 1 le dernier indice de chaque P en seconde position :

$$\begin{aligned}
&3 [u^2(P_{300} - P_{201}) + 2uv(P_{210} - P_{111}) + v^2(P_{120} - P_{021}) \\
&+ 2vw(P_{111} - P_{012}) + w^2(P_{102} - P_{003}) + 2uw(P_{201} - P_{102})],
\end{aligned}$$

On a ainsi le résultat cherché sans avoir à effectuer de dérivation de la fonction $\sigma(u, v, w)$ définissant notre élément P3, cf. [10], à savoir :

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=3} B_{i,j,k}^3(u, v, w) P_{i,j,k},$$

avec le réseau des P_{ijk} donné ci-après :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P_{003} & & \\ & & & & & & \\ & & P_{102} & & P_{012} & & \\ & & & & P_{111} & & \\ & P_{201} & & & & & P_{021} \\ & & & & & & \\ P_{300} & P_{210} & P_{120} & & & & P_{030} \end{array}$$

Vérifions simplement le terme en u^2 et le terme en $2uv$. Le terme en u^2 vient de la dérivation du terme en u^3 et de celle du terme en u^2w de $\sigma(u, v, w)$, soit la dérivée de $u^3 P_{300} + 3u^2w P_{201}$, soit donc $3u^2(P_{300} - P_{201})$. Le terme en $2uv$ vient de la dérivation du terme en $3u^2v$ et de celle du terme en $6uvw$, soit la dérivée de $3u^2v P_{210} + 6uvw P_{111}$, soit donc $6uv P_{210} - 6uv P_{111}$, soit encore $3 \times 2uv(P_{210} - P_{111})$.

Les "points" de contrôle N_{ijk} . On part à nouveau de la Relation (17) pour retrouver les N_{ijk} de la dimension 2 et du degré 3, donc $\dim = 2$, $d = 3$ et $q = 4$. On a $\mathbf{I} = (I, J, K)$, $\mathbf{i}^1 = (i^1, j^1, k^1)$ et $\mathbf{i}^2 = (i^2, j^2, k^2)$, les deux instanciats à utiliser. Les N_{ijk} forment le réseau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & N_{004} & & \\ & & & & & & \\ & & N_{103} & & N_{013} & & \\ & & & & & & \\ N_{202} & N_{112} & & & N_{022} & & \\ & & & & & & \\ N_{301} & N_{211} & N_{121} & & N_{031} & & \\ & & & & & & \\ N_{400} & N_{310} & N_{220} & N_{130} & & & N_{040}, \end{array}$$

il y a donc trois types de tels coefficients, ceux relatifs aux coins, ceux relatifs aux "nœuds" d'arêtes et ceux relatifs aux "nœuds" internes. Par manque de courage, on va simplement exhiber N_{400} et N_{310} .

- Calcul de N_{400} .

Cherchons le coefficient de contrôle N_{400} , $I = 4, J = K = 0$, donc la somme

$$N_{\mathbf{I}} = \frac{3^2}{K_{\mathbf{I}}} \sum_{(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2), \sum \mathbf{i}^\beta = \mathbf{I}} \left(\prod_{\beta=1,2} K_{\mathbf{i}^\beta} \right) M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2}$$

se réduit à un seul terme correspondant aux triplets $\mathbf{i}^1 = (2, 0, 0)$ et $\mathbf{i}^2 = (2, 0, 0)$ également, soit

$$N_{400} = \frac{3^2}{K_{400}} K_{200} K_{200} M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2},$$

comme $K_{400} = 1$ et que $K_{200} = 1$ également, on a : $N_{400} = 9 M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2}$, il reste donc à exprimer ce déterminant en fonction des P_{ijk} . On a :

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} &= \begin{vmatrix} \Delta^{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3} P_{\mathbf{i}^1 + \mathbf{e}_1} & \Delta^{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3} P_{\mathbf{i}^2 + \mathbf{e}_2} \end{vmatrix}, \\ M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} &= \begin{vmatrix} \Delta^{(1,0,-1)} P_{300} & \Delta^{(0,1,-1)} P_{210} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} = |(P_{300} - P_{201}) \quad (P_{210} - P_{201})|,$$

qui n'est autre que le produit vectoriel des deux vecteurs adjacents au sommet P_{300} , alias A_1 . On retrouve effectivement que N_{400} est le jacobien associé au sommet A_1 et vaut 9 fois la

surface (au facteur 2 près) du triangle coin appuyé sur le sommet en question et les 2 points de contrôle adjacents, cf. [10].

- Calcul de N_{310} .

Calculons, pour terminer, un terme moins facile, par exemple N_{310} . Dans

$$N_{\mathbf{I}} = \frac{3^2}{K_{\mathbf{I}}} \sum_{(\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2), \sum \mathbf{i}^\beta = \mathbf{I}} \left(\prod_{\beta=1,2} K_{\mathbf{i}^\beta} \right) M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2},$$

les triplets permettant de construire la solution sont au nombre de deux, $\mathbf{i}^1 = (2, 0, 0)$ et $\mathbf{i}^2 = (1, 1, 0)$, la somme comprend donc 2 termes :

$$N_{310} = \frac{3^2}{K_{310}} (K_{200}K_{110}M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} + K_{110}K_{200}M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1}).$$

On a $K_{310} = \frac{4!}{3!} = 4$, $K_{110} = 2$ et $K_{200} = 1$. Par suite :

$$N_{310} = \frac{9}{2} (M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} + M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1}).$$

Comme

$$M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} = \left| \Delta^{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3} P_{\mathbf{i}^1 + \mathbf{e}_1} \quad \Delta^{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3} P_{\mathbf{i}^2 + \mathbf{e}_2} \right|,$$

on trouve

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{i}^1, \mathbf{i}^2} &= \left| \Delta^{(1,0,-1)} P_{300} \quad \Delta^{(0,1,-1)} P_{120} \right|, \\ &= |(P_{300} - P_{201}) \quad (P_{120} - P_{111})| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{i}^2, \mathbf{i}^1} &= \left| \Delta^{(1,0,-1)} P_{210} \quad \Delta^{(0,1,-1)} P_{210} \right|, \\ &= |(P_{210} - P_{111}) \quad (P_{210} - P_{201})|, \end{aligned}$$

avec, pour les P_{ijk} , l'arrangement schématique indiqué ci-dessus.

5.5 Remarque sur le calcul effectif des $N_{\mathbf{I}}$

Dans [10], pour le triangle P3, et ici, dans la section précédente, pour le tétraèdre P2, on a donné une méthode de calcul de ces coefficients via des instanciations particulières des nœuds d'évaluation et la résolution de divers systèmes. Il semble que le calcul direct proposé ici, bien que la formule soit un peu rebutante, soit un moyen plus facile de calcul bien que plus coûteux *a priori*.

6 Construction du maillage tétraédrique P1

On revient au problème de départ, les tétraèdres P2. La donnée du mailleur est la surface P2 du domaine à mailler. Cette surface est formée de triangles P2 à 6 nœuds. Les trois premiers nœuds, $A_i, i = 1, 3$, sont les sommets du triangle, les autres sont situés sur les arêtes du triangle. Le nœud A_4 est celui de l'arête A_1A_2 , A_5 est sur A_2A_3 , A_6 sur A_1A_3 .

On considère la surface P1 obtenue en ne retenant que les sommets des triangles P2. Cette surface est la donnée du mailleur tétraédrique qui construit un maillage du volume avec cette seule donnée.

Le processus de maillage, basé sur ces données, est alors classique. Le résultat est un maillage P1 respectant la surface P1 extraite de la surface P2 donnée dont les sommets internes sont ceux obtenus en se basant sur les critères habituels (densité, gradation, qualité des éléments, ...).

6.1 Compatibilité P2-P1 d'un maillage de surface P2

Un maillage de surface P2 est P1 compatible si le maillage appuyé sur les seuls sommets du maillage P2 (avec des arêtes droites) est valide. Ceci n'est pas nécessairement le cas dans des zones courbes, minces ou non, et la méthode discutée dans ce papier ne peut pas être appliquée. En pratique, deux cas de non compatibilité sont faciles à comprendre, le premier, le maillage P1 est auto-intersectant et, en second, le maillage P1 contient deux faces P1 extraites identiques (pensons, en deux dimensions, à un cercle maillé avec seulement deux segments P2).

6.2 Compatibilité P1-P2 d'un maillage tétraédrique P1

On fait l'hypothèse que la surface est P2-P1 compatible. Alors, le maillage de volume P1 est P2 compatible si la création des nœuds d'arêtes et l'éventuelle courbure des arêtes P2 conduit à un maillage P2 valide.

Il est clair que l'on peut s'attendre à des difficultés dans les zones courbes et minces et l'objet de ce papier est justement de lever cette impossibilité en montrant qu'il est toujours possible de construire un maillage P2 dès lors que la surface du domaine est P2-P1 compatible.

Il est moins évident que l'on peut rencontrer également des problèmes même dans des zones courbes non situées dans des régions minces. Un cas représentatif est le cas d'un tétraèdre P1 dont deux faces sont frontalières (un « sliver » topologique), ou ayant simplement au moins 3 arêtes frontières, sans que sa qualité soit mauvaise (les deux faces formant un angle raisonnable au sens du P1). Un tel tétraèdre doit être détecté et cassé avant d'opérer la transformation vers le P2 (sinon, on trouvera au moins une face de donnée qualifiée de fausse alors qu'elle est, à l'évidence, bonne). Considérons le tétraèdre P1 de sommets A_i ($i = 1, 4$) et soient $A_1A_2A_3$ et $A_1A_3A_4$ ses deux faces frontières, l'arête A_2A_4 étant libre. Si, par exemple, les trois points de contrôle du P2 adjacents à A_1 sont coplanaires⁵ avec ce même A_1 , alors l'élément sera de jacobien nul et les deux faces P2 correspondant aux deux faces P1 seront déclarées fausses à tort. Pour éviter cette pathologie, il est nécessaire de la détecter puis de la supprimer par un traitement classique identique à celui utilisé pour les "slivers".

7 Passage du P1 au P2

On dispose d'un maillage P1 et on connaît les nœuds des arêtes frontières tandis que l'on ne connaît pas les autres nœuds internes.

7.1 Les nœuds “milieux”, position et numérotation

Les nœuds des arêtes non donnés, nœuds internes donc, sont positionnés aux milieux de chaque arête. Si A et B sont les extrémités de l'arête traitée, on a simplement $M = \frac{A+B}{2}$.

Remarque On est donc dans le cas $\frac{1}{4} < t < \frac{3}{4}$ et les formules de passage de C à M ou de M à C s'appliquent.

Il faut donner une numérotation aux nœuds non sommets du maillage. Ces nœuds sont attachés aux arêtes du maillages. Le plus évident (et rapide) est de construire le tableau des arêtes du maillage et de numérotter ces arêtes. Si np est le premier numéro (indice) libre et si $\#a$ est le numéro de l'arête traitée, alors son nœud aura comme numéro (indice) $np - 1 + \#a$. Notons que cette numérotation n'a aucun caractère d'optimalité (au regard d'un quelconque solveur).

⁵Les trois plans tangents issus de A_1 sont confondus.

7.2 Éléments P1 virtuels

Découpage naturel. À chaque tétraèdre actuel (P1 et plus tard P2) peut être associé, virtuellement, son découpage en 8 tétraèdres P1. Ce découpage n'est pas unique⁶ et nous en choisisons un. Pour le tétraèdre de nœuds A_i , de sommets les 4 premiers A_i et de nœuds N_{i-4} les 6 autres A_i ($N_{i-4} = A_i, i = 5, 10$), on obtient comme éléments du découpage 4 tétraèdres dits *coins*

- $[A_1, N_1, N_3, N_4], [A_2, N_2, N_1, N_5], [A_3, N_3, N_2, N_6], [A_4, N_4, N_6, N_5]$,

et 4 tétraèdres dits *internes*

- $[N_1, N_3, N_5, N_2], [N_2, N_3, N_5, N_6], [N_6, N_3, N_5, N_4], [N_4, N_3, N_5, N_1]$.

Ces éléments virtuels⁷ peuvent servir à définir les boules virtuelles des nœuds P2. Pour un nœud sommet, la boule virtuelle P2 est la boule P1 du sommet où on remplace chaque élément P1 par le tétraèdre coin correspondant à son découpage virtuel. Cette boule virtuelle P2 comprend donc le même nombre d'éléments que la boule P1. Pour un nœud sur une arête, la boule virtuelle P2 est formé par les éléments du découpage des éléments P1 de la coquille de l'arête qui comprennent ce nœud. Cette boule virtuelle P2 comprend donc, pour chaque élément de la coquille, 4 ou 6 éléments virtuels.

Il est tentant de penser que si tous les tétraèdres virtuels du découpage naturel sont de volume positif, alors le maillage P2 est valide au sens où les jacobiens des éléments évalués aux nœuds de référence sont positifs. L'expression de ce que sont les jacobiens vient infirmer cette idée intuitive. En effet, aucun de ces jacobiens n'est le volume d'un tétraèdre du découpage naturel. Ceci conduit à introduire des tétraèdres de contrôle différents.

Découpage de contrôle. Si on évalue le volume des 4 tétraèdres coins du découpage naturel de l'élément P3, en remplaçant les nœuds d'arête par le point de contrôle de l'arête, on évalue les 4 premiers jacobiens du tétraèdre P2. Ces quatre tétraèdres jouent donc un rôle particulier et permettent l'analyse de l'élément au voisinage de ses sommets.

7.3 Validité et qualité

Dans la majorité des cas et en particulier quand l'arête courbe est proche de l'arête droite (ce que préconise la théorie, [6]), le maillage P2 formé est correct. Il existe néanmoins des cas, voir [8], Chapitre 22, où un nœud "milieu" est positionné de telle sorte que son insertion mécanique conduit à un maillage invalide (jacobien négatif, autrement dit éléments retournés ou auto-intersectants). Le cas d'une zone courbe mince est un exemple typique où peut se présenter cette pathologie.

Notations. On note, quand cela a un sens :

- V_k le volume du tétraèdre k du découpage naturel,
- $\mathcal{J}_2(K, A)$ le jacobien P2 de l'élément K évalué en \hat{A} , antécédent de A ,
- $\mathcal{J}_1(K)$ le jacobien P1 (le volume au facteur 6 près) du tétraèdre formé par les 4 sommets du tétraèdre P2 considéré,
- $J_2(K)$ la moyenne des $\mathcal{J}_2(K, A)$ (qui, pensons nous, est proportionnel au volume de l'élément P2) si ces quantités sont toutes strictement positives,
- $J_2(K)$ le minimum des $\mathcal{J}_2(K, A)$ si l'une au moins de ces valeurs est non positive,
- $Q_J(K) = \frac{\max_A \mathcal{J}_2(K, A)}{\min_A \mathcal{J}_2(K, A)}$ si tous les jacobiens sont strictement positifs. $Q_J(K)$ mesure la dispersion ou la variabilité de K .

Validité. Une première observation est que $J_1(K)$ peut parfaitement être négatif tandis que les jacobiens P2 sont positifs.

Le critère $J_2(K)$ strictement positif assure la validité géométrique de l'élément.

⁶Le premier, indiqué *in extenso* ici, correspond à la coquille de l'arête N_3, N_5 pour le bord $[N_1, N_2, N_6, N_4]$. Le second est celui de l'arête N_1, N_6 pour le bord $[N_2, N_3, N_4, N_5]$, le dernier, à l'arête N_2, N_4 pour le bord $[N_1, N_5, N_6, N_3]$.

⁷Une remarque amusante : si les nœuds des arêtes sont au milieu, le volume des 8 éléments est identique bien que les éléments ne soient pas homothétiques.

Qualité. De manière surprenante, il ne semble pas exister de littérature⁸ sur cette notion de qualité en P2 (comme nous en avons pour les tétraèdres P1, par exemple $Q(K) = \alpha \frac{h}{\rho}$, le rapport diamètre - rayon de la sphère inscrite à un coefficient de normalisation près).

On note que pour un élément P2 droit on a $Q_J(K) = 1$. Si on considère un élément P2 droit et que l'on bouge, au hasard, l'un de ses nœuds on observe que $Q_J(K)$ varie au fur et à mesure que les faces se déforment. On observe également que l'on peut, en bougeant les autres nœuds de l'élément, faire varier (croître ou décroître) cette quantité (et vérifier visuellement que le résultat semble plus "naturel"). En fait, si on garde comme mesure de qualité la mesure P1 classique en l'adaptant, nous pensons que l'on obtient une mesure pertinente (et continue quand on passe d'un élément P2 courbe à un élément P2 droit dont les nœuds milieux sont situés aux milieux de ses arêtes qui, de fait, est mesuré comme l'élément P1 associé à ses seuls sommets). Donc

$$Q(K) = \alpha \frac{h}{\rho} \quad (18)$$

est notre définition de la qualité en forme avec h le diamètre et ρ le rayon inscrit. Quantités que l'on peut calculer approximativement en utilisant les distances entre nœuds, pour h , et le rapport volume-surface, pour ρ , où le volume est huit fois le volume minimum parmi 8 sous-volumes du découpage naturel⁹ et la surface est la somme des 16 sous-faces externes de ce découpage.

Remarque. Il semble que la mesure Q_J ne voit pas certains cas de figure et qu'il soit nécessaire de compléter cette mesure par la mesure Q .

7.4 Construction du maillage P2

Rappelons le processus de maillage déjà esquissé ci-dessus. La donnée est le maillage P2 de la surface du domaine. On extrait des faces P2 données des faces P1. Une face P1 est formée par le triangle (plan) dont les sommets sont les sommets de la face initiale. Le polyèdre ainsi défini est maillé en tétraèdres P1. Les nœuds des arêtes de la donnée sont pris en compte permettant de régénérer les faces P2 initiales. Les nœuds des arêtes internes sont créés au milieu de ces arêtes. On dispose ainsi d'un maillage en tétraèdres P2.

Si ce maillage est valide, il ne reste qu'à l'optimiser pour produire le résultat final. En cas contraire, il faut d'abord rendre valide le maillage avant de pouvoir l'optimiser. Les maillages non valides présentent deux situations induisant cette invalidité. Le premier cas est celui où un sommet interne du maillage P1 se trouve à l'extérieur du domaine P2. Le second cas concerne des nœuds d'arêtes internes positionnés au milieu de ces arêtes tels que un ou plusieurs tétraèdres incidents sont de jacobiens négatifs ou nuls.

Dans la section suivante, on décrit quelques algorithmes mis en place pour rendre valide (si nécessaire) puis optimiser le maillage P2.

8 Quelques algorithmes

Les algorithmes de manipulation des maillages P1 sont essentiellement le bougé de sommet et la bascule d'arête (les autres s'en déduisant le plus souvent, pensons, par exemple, à la fusion de deux sommets). Ici, en P2, nous avons le bougé de sommet et de nœud (non sommet), la bascule et les autres opérateurs sont envisageables mais semblent plus délicats à implémenter. Nous allons donc baser notre stratégie de modification (correction ou optimisation) essentiellement sur des variantes de bougé et de quelques autres opérateurs classiques, tel l'utilisation de méthode de minimisation de critères, ou moins classiques, comme la similitude entre items voisins (qui traite, dans certains cas, de manière efficace l'auto-intersection de deux arêtes, l'une étant réputée juste, l'autre étant libre).

⁸Les études de convergence étant par nature asymptotique, les hypothèses indiquent que le milieu droit et le vrai milieu sont proches.

⁹ou de ce même découpage mais avec les points de contrôle, formule qui conserve également la continuité quand on passe d'un élément courbe à un élément droit. A discuter donc !.

Ainsi, deux types d'algorithmes sont définis, les uns pour rendre valide les éléments du maillage, les autres pour optimiser la qualité en forme.

8.1 Redressement par minimisation de la déformation (validité)

On définit, en premier, un champ de déformations initial associé aux nœuds du maillage P1 enrichi avec les nœuds du maillage frontalier P2. Il s'agit d'un champ de vecteurs attribué aux sommets et aux nœuds de ce maillage. Ce champ est nul aux sommets et aux nœuds internes tandis qu'aux nœuds frontaliers, il est le vecteur mesurant le déplacement entre le nœud considéré et le milieu de l'arête droite frontalière support de ce nœud.

Le redressement consiste alors à lisser ce champ de déformations sur l'ensemble des nœuds du maillage P2. Pour cela, on définit l'énergie de déformation du maillage et ce lissage revient à minimiser cette énergie.

On considère un tétraèdre P2, noté K , on va exprimer l'énergie de déformation de K en fonction des déplacements des ses nœuds et sa minimisation nous donnera une relation liant ces déplacements. Pour calculer l'énergie de déformation de K , on considère deux types d'interpolation des déplacements dans K , linéaire et quadratique. Dans le premier cas, l'élément P2 est découpé en 8 éléments P1 et la déformation de chacun de ces éléments est étudié. Dans le second cas, on considère directement la déformation de K comme un champ P2.

Interpolation P1 via le découpage P1. Soit K un élément de ce découpage (voir section ci-dessus) de sommets A, B, C et D ayant, respectivement, les déplacements u_1, u_2, u_3 et u_4 . On désigne par V le produit mixte $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ qui représente 6 fois le volume de K . Soit P un point interne de coordonnées barycentriques α, β, γ et δ dans cet élément. On a :

$$\alpha = \frac{(\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BP}}{V}, \beta = \frac{(\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CP}}{V}, \gamma = \frac{(\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DA}) \cdot \overrightarrow{DP}}{V}, \delta = \frac{(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP}}{V},$$

que l'on note :

$$\alpha = \frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{BP}}{V}, \beta = \frac{\overrightarrow{S_2} \cdot \overrightarrow{CP}}{V}, \gamma = \frac{\overrightarrow{S_3} \cdot \overrightarrow{DP}}{V}, \delta = \frac{\overrightarrow{S_4} \cdot \overrightarrow{AP}}{V}.$$

On note également les composantes des S_i par S_{ix}, S_{iy} et S_{iz} .

Soit u le déplacement de P déduit des déplacements aux sommets A, B, C et D (les u_i) par interpolation linéaire. Dans ce cas, u , le déplacement en P , s'écrit comme $u = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4$. On désigne les composantes de u par u_x, u_y et u_z .

L'énergie de déformation en P , suite au déplacement u , peut être définie par le carré de la norme de Frobenius de la matrice jacobienne $j(u)$ donnée par :

$$J(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\|J(u)\|_F^2 = \|\nabla u_x\|^2 + \|\nabla u_y\|^2 + \|\nabla u_z\|^2.$$

L'énergie de déformation sur K est alors définie comme :

$$E(K) = \int_K \|J(u)\|_F^2 d\omega,$$

où $d\omega$ représente le volume élémentaire.

On regarde les trois composantes de u de manière indépendante, ainsi, par exemple, on a :

$$\|\nabla u_x\|^2 = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2,$$

et des expressions similaires pour u_y et u_z . Comme $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{S_{1x}}{V}$ et des formules analogues pour les autres coefficients et les autres dérivées, il vient :

$$\|\nabla u\|^2 = \frac{1}{V^2} \left[\left(\sum_i S_{ix} u_i \right)^2 + \left(\sum_i S_{iy} u_i \right)^2 + \left(\sum_i S_{iz} u_i \right)^2 \right],$$

ou, encore ,

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{V^2} & \left[\sum_i \langle \vec{S}_i, \vec{S}_i \rangle u_i^2 + 2 \left(\langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle u_1 u_2 + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle u_1 u_3 + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle u_1 u_4 \right. \right. \\ & \left. \left. + \langle \vec{S}_2, \vec{S}_3 \rangle u_2 u_3 + \langle \vec{S}_2, \vec{S}_4 \rangle u_2 u_4 + \langle \vec{S}_3, \vec{S}_4 \rangle u_3 u_4 \right) \right]. \end{aligned}$$

On remarque que l'énergie $\|\nabla u\|^2$ ne dépend pas de P , ainsi :

$$E(K) = \int_K \|\nabla u\|^2 d\omega = \frac{V}{6} \|\nabla u\|^2.$$

Comme la forme quadratique E est positive, il existe des coefficients g_{ij} tels que E s'écrit, en fonction des déplacements aux extrémités des arêtes, comme :

$$E(K) = \sum_{i,j} g_{ij} (u_i - u_j)^2.$$

En dérivant les deux expressions de $E(K)$ par rapport à u_1 et en instanciant $u_4 = 1$, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, on obtient : $g_{14} = -\frac{6 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle}{V}$. De manière générale, par symétrie, on a :

$$g_{ij} = -\frac{6 \langle \vec{S}_i, \vec{S}_j \rangle}{V}.$$

Ainsi :

$$E(K) = -6 \sum_{i,j} \frac{\langle \vec{S}_i, \vec{S}_j \rangle}{V} (u_i - u_j)^2.$$

La minimisation de l'énergie $E(K)$ consiste à annuler la dérivée de $E(K)$ par rapport aux variables u_k . On obtient ainsi un système linéaire d'ordre le nombre total de nœuds en les variables u_k . Pour résoudre ce grand système, on peut appliquer la méthode itérative de Gauss-Seidel (sous réserve de convergence) qui consiste à chaque itération, pour trouver u_i , à prendre en compte les déplacements aux sommets de la boule (voir plus bas) construite autour du nœud i considéré. Au final on trouve :

$$u_{ix} = \frac{\sum_{i,j} g_{ij} u_{jx}}{\sum_{i,j} g_{ij}},$$

et des expressions analogues pour les deux autres composantes u_{iy} et u_{iz} .

Pour un sommet, la boule considérée est formée des tétraèdres définis par le sommet en question et ses nœuds adjacents, le tétraèdre coin dans notre terminologie, de chaque tétraèdre de la boule P1 du sommet. Pour un nœud non sommet, on construit la coquille de l'arête le portant et on prend les deux tétraèdres coins partageant le nœud en question pour chaque élément de cette coquille ainsi que les tétraèdres non coins de cette coquille appuyés sur ce nœud.

Cette méthode permet de calculer les u_i des entités non frontalières (les déplacements des entités frontalières étant, par définition, connues). Elle donne de bons résultats mais, néanmoins, n'est pas capable de considérer les cas où le découpage P1 contient un élément de volume négatif ou nul. Cette limite nous pousse à considérer l'interpolation P2 décrite ci-dessous.

Interpolation P2. On considère le déplacement u comme un champ P2. On note u_i le déplacement au nœud i de l'élément. À partir des u_i , on construit le champ u , interpolé P2 défini par les v_i construits de la manière suivante : $v_i = u_i$, $i = 1, 4$ et $v_5 = \frac{4u_5 - u_1 - u_2}{2}$ et des expressions analogues pour les autres v_i , $i = 6, 10$. Il est clair (c'est la formule de De Casteljaeu) que u s'écrit comme :

$$u = \alpha(\alpha v_1 + \beta v_5 + \gamma v_7 + \delta v_8) + \beta(\alpha v_5 + \beta v_2 + \gamma v_6 + \delta v_9) \\ + \gamma(\alpha v_7 + \beta v_6 + \gamma v_3 + \delta v_{10}) + \delta(\alpha v_8 + \beta v_9 + \gamma v_{10} + \delta v_4).$$

On pose

$$U_1 = \alpha v_1 + \beta v_5 + \gamma v_7 + \delta v_8,$$

$$U_2 = \alpha v_5 + \beta v_2 + \gamma v_6 + \delta v_9,$$

$$U_3 = \alpha v_7 + \beta v_6 + \gamma v_3 + \delta v_{10}$$

et

$$U_4 = \alpha v_8 + \beta v_9 + \gamma v_{10} + \delta v_4,$$

alors, on a :

$$u = \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 + \delta U_4$$

et on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{S_{1x}}{V},$$

et des expressions analogues pour les autres coefficients et les autres dérivées. Par suite :

$$\|\nabla u\|^2 = \frac{4}{V^2} \left[\left(\sum_i S_{ix} U_i \right)^2 + \left(\sum_i S_{iy} U_i \right)^2 + \left(\sum_i S_{iz} U_i \right)^2 \right],$$

ou, encore,

$$\|\nabla u\|^2 = \frac{4}{V^2} \left[\sum_i \langle \vec{S}_i, \vec{S}_i \rangle U_i^2 + 2 \left(\langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle U_1 U_2 + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle U_1 U_3 + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle U_1 U_4 \right. \right. \\ \left. \left. + \langle \vec{S}_2, \vec{S}_3 \rangle U_2 U_3 + \langle \vec{S}_2, \vec{S}_4 \rangle U_2 U_4 + \langle \vec{S}_3, \vec{S}_4 \rangle U_3 U_4 \right) \right].$$

De même, l'énergie de déformation $E(K)$ de l'élément K , s'écrit :

$$E(K) = \int_K \|\nabla u\|^2 d\omega.$$

Comme la forme quadratique E est positive, il existe des coefficients g_{ij} tels que E s'écrit, en fonction des déplacements aux extrémités des arêtes, comme :

$$E(K) = \sum_{i,j} g_{ij} (U_i - U_j)^2,$$

avec

$$g_{ij} = -6 \frac{\langle \vec{S}_i, \vec{S}_j \rangle}{V},$$

en supposant, pour simplifier, que l'énergie est identique en tout point interne à l'élément, ce qui revient à considérer l'approximation suivante :

$$E(K) = \int_K \|\nabla u\|^2 d\omega \approx \frac{V}{6} \|\nabla u\|^2.$$

Ainsi :

$$E(K) = -6 \sum_{i,j} \frac{\langle \vec{S}_i, \vec{S}_j \rangle}{V} (U_i - U_j)^2.$$

La minimisation de l'énergie $E(K)$ consiste à annuler la dérivée de $E(K)$ par rapport aux variables u_k . On obtient, par exemple pour l'élément K , si le nœud considéré est le premier sommet, donc par rapport à u_1 (et au facteur 2 près) :

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle}{V} (U_1 - U_2) \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{\langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle}{V} (U_1 - U_3) \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \\ & + \frac{\langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle}{V} (U_1 - U_4) \left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} \right), \end{aligned}$$

avec, comme $\alpha = 1$,

$$U_1 = v_1 = u_1, U_2 = v_5, U_3 = v_7, U_4 = v_8,$$

ce qui donne, comme contribution :

$$\frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle}{2V} (u_1 - v_5) + \frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle}{2V} (u_1 - v_7) + \frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle}{2V} (u_1 - v_8),$$

ou encore :

$$\frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle}{4V} (3u_1 - 4u_5 + u_2) + \frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle}{4V} (3u_1 - 4u_7 + u_3) + \frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle}{4V} (3u_1 - 4u_8 + u_4),$$

qui s'écrit donc sous la forme $a_{1K}u_1 + b_{1K}$ avec :

$$a_{1K} = \frac{9(\langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle)}{4V}$$

$$b_{1K} = \frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle}{4V} (-4u_5 + u_2) + \frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle}{4V} (-4u_7 + u_3) + \frac{3 \langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle}{4V} (-4u_8 + u_4),$$

et, au final :

$$a_{1K} = \frac{3(\langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle)}{V}, \quad (19)$$

$$b_{1K} = \frac{\langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle}{V} (-4u_5 + u_2) + \frac{\langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle}{V} (-4u_7 + u_3) + \frac{\langle \vec{S}_1, \vec{S}_4 \rangle}{V} (-4u_8 + u_4). \quad (20)$$

Les contributions de K au nœud u_i dans les 9 autres possibilités gardent la même forme (comme ci-dessus pour les nœuds sommet et légèrement différente pour les nœuds d'arête, voir l'Annexe 4) et la solution cherchée s'écrit comme :

$$u_i = - \frac{\sum_K b_{iK}}{\sum_K a_{iK}}. \quad (21)$$

En pratique, si le nœud est un sommet, on prend sa boule et dans chaque élément de celle-ci on regarde sa position ($i = 1, 2, 3$ ou 4) pour trouver les contributions (les coefficients a et b ci-dessus). Si le nœud est un nœud d'arête, on prend la coquille de cette arête et dans chaque élément de cette coquille on regarde sur quelle arête il se trouve pour trouver la contribution (les a et les b) de cet élément particulier.

8.2 Redressement par similitude ou bougé (validité)

Les algorithmes de redressement par minimisation de la déformation permettent, en général, de rendre valide les maillages P2 non valides bien que le système global d'optimalité ne soit pas résolu par une approche directe. Mais, comme par ailleurs, certains cas semblent tellement évidents à résoudre, nous avons également développé des heuristiques simulant d'une certaine façon et de manière simple ce redressement.

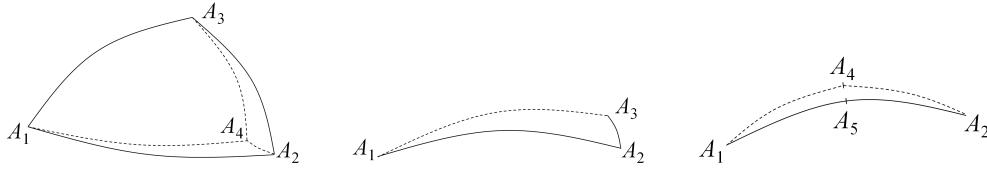


FIG. 4 – *Similitude avec une face (le sommet A_4 est proche du sommet A_2), à gauche, avec une arête (le sommet A_3 est proche du sommet A_2), au milieu, et avec deux demie-arêtes (le sommet A_4 est proche du nœud A_5 de l'arête A_1A_2), à droite.*

8.2.1 Redressement par similitude avec une face

On considère une face juste et un élément non valide incident. On va, dans certains cas, utiliser la face juste pour construire, par similitude, deux autres faces (et en déduire la dernière) de cet élément.

Soit, pour fixer les idées, $A_1A_2A_3$ la face juste (Figure 4, à gauche). On calcule la longueur des 3 segments (droits) issus de A_4 vers les trois sommets de la face. On compare le rapport entre le maximum et le minimum de ces quantités. Si le rapport est supérieur à un seuil donné, on décide qu'il y a une similitude entre certaines arêtes de l'élément en question. Supposons que l'arête la plus courte soit A_2A_4 alors l'arête A_1A_4 ressemble à l'arête A_1A_2 et l'arête A_3A_4 ressemble à l'arête A_2A_3 . Les nœuds A_8 et A_{10} se déduisent des nœuds A_1 et A_2 comme suit :

- $lmin = \|\overrightarrow{A_2A_4}\|$
- $C_5 = \frac{4 \cdot A_5 - A_1 - A_2}{2}$
- $\vec{V} = \overrightarrow{A_5C_5}$
- Faire $C_8 = C_5 + \alpha \vec{V}$ avec $\alpha = 0.5 * \frac{lmin}{\|\vec{V}\|}$
- Contrôler l'évolution des jacobiens de l'élément et ajuster α le cas échéant
- $A_8 = \frac{A_1 + A_4 + 2 \cdot C_8}{4}$.

Idem pour recalculer A_{10} . À l'issue de cet algorithme, on a reconstruit la face $A_1A_2A_4$ et la face $A_2A_3A_4$, la dernière s'en déduisant automatiquement.

8.2.2 Redressement par similitude avec une arête

On considère une arête juste et un élément de sa coquille non valide. On va, dans certains cas, utiliser l'arête juste pour en déduire une ou deux faces de cet élément.

Arête complète. Soit, pour fixer les idées, A_1A_2 l'arête juste et A_5 son nœud (Figure 4, au milieu). On calcule la longueur des 4 segments (droits) issus de A_1 et A_2 vers A_3 et A_4 . On compare le rapport entre le maximum (si ce maximum est atteint pour l'arête A_1A_2) et le minimum de ces quantités. Si le rapport est supérieur à un seuil donné, on décide qu'il y a une similitude entre l'arête A_1A_2 et une autre arête. Si, par exemple, A_2A_3 donne le minimum, alors c'est l'arête A_1A_3 qui ressemble le plus à A_1A_2 et son nœud A_7 va être déduit du nœud A_5 comme suit :

- $lmin = \|\overrightarrow{A_2A_3}\|$
- $C_5 = \frac{4 \cdot A_5 - A_1 - A_2}{2}$
- $\vec{V} = \overrightarrow{A_5C_5}$
- Faire $C_7 = C_5 + \alpha \vec{V}$ avec $\alpha = 0.5 * \frac{lmin}{\|\vec{V}\|}$
- Contrôler l'évolution des jacobiens de l'élément et ajuster α le cas échéant
- $A_7 = \frac{A_1 + A_3 + 2 \cdot C_7}{4}$.

À l'issue de cet algorithme, on a reconstruit la face $A_1A_2A_3$.

Demie-arête. Soit, encore, A_1A_2 l'arête juste et A_5 son nœud (Figure 4, à droite). On calcule la longueur des 2 segments (droits) issus de A_5 vers A_3 et A_4 et la longueur de A_1A_2 . On compare le rapport entre le maximum et le minimum de ces quantités. Si le rapport est

supérieur à un seuil donné, on décide qu'il y a une similitude entre l'arête A_1A_2 et deux autres arêtes. Si, par exemple, A_5A_4 donne le minimum, alors l'arête A_1A_4 ressemble à la première moitié de A_1A_2 (entre A_1 et A_5) et son nœud A_8 va être déduit du nœud situé au quart de A_1A_2 noté A_{51} tandis que l'arête A_2A_4 ressemble à la seconde moitié de A_1A_2 (entre A_5 et A_2) et son nœud A_9 va être déduit du nœud situé au trois-quarts de A_1A_2 noté A_{52} . La position de ces deux nouveaux nœuds se fait comme suit :

- $lmin = \|\overrightarrow{A_5A_4}\|$
- $C_5 = \frac{4 \cdot A_5 - A_1 - A_2}{2}$ ($t = \frac{1}{2}$ dans la formule générale)
- $A_{51} = \frac{9 \cdot A_1 + A_2 + 6 \cdot C_5}{16}$ ($t = \frac{1}{4}$ dans la formule générale)
- $M_{51} = 0.5(A_1 + C_5)$ le milieu de A_1C_5
- $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{M_{51}C_{51}}$
- Faire $C_8 = M_{51} + \alpha \overrightarrow{V}$ avec $\alpha = 0.25 * \frac{lmin}{\|\overrightarrow{V}\|}$
- Contrôler l'évolution des jacobiens de l'élément et ajuster α le cas échéant
- $A_8 = \frac{A_1 + A_4 + 2 \cdot C_8}{4}$.

On applique le même algorithme pour l'autre arête pour trouver A_9 à partir de A_{52} ($t = \frac{3}{4}$), les formules sont identiques en inversant les poids de A_1 et A_2 . À l'issue de cet algorithme, on a reconstruit la face $A_1A_2A_4$.

8.2.3 Ouverture d'un élément plat par bougé

On rencontre des éléments de volume P1 très petit ou dont tel ou tel jacobien est très petit.

Quand un tel élément a ses quatre sommets fixes, on ne peut que bouger ses nœuds libres afin de l'ouvrir. L'idée est simple, on regarde les angles entre les faces et on considère les 2 faces les plus coplanaires et le nœud de l'arête commune à ces deux faces. On construit une direction de déplacement à partir des deux normales sortantes de ces faces. Le nœud est alors bougé selon cette direction.

Pour un élément ayant un sommet libre, on applique la même idée aux nœuds (donc libres) de sa grappe.

8.3 Optimisation par bascule de faces et par bougé (qualité)

8.3.1 La bascule de face et le bougé

À des fins d'optimisation, nous utilisons essentiellement deux opérateurs, la bascule de face et le bougé (de sommets ou de nœuds).

Bascule de face. On considère ici deux tétraèdres partageant une face libre. L'idée est de supprimer cette face commune et de construire les trois tétraèdres s'enroulant autour de l'arête formée en joignant les deux sommets voyeurs de cette face. Cet opérateur n'est que la généralisation de l'opérateur classique de bascule en P1. La seule difficulté est de « bien » gérer les nœuds initiaux lors de l'affectation de ceux des nouveaux éléments et de créer le nouveau nœud sur l'arête créée.

Bougé. Comme en P1, l'idée est de trouver une position optimale ou meilleure pour le sommet ou le nœud que l'on bouge au regard du critère choisi.

8.3.2 Optimisation via la dispersion des jacobiens

On regarde ici le critère de dispersion Q_J . On utilise une méthode empirique (faute de mieux) qui revient à bouger un sommet ou un nœud d'arête. La validation doit prendre en compte la boule d'un sommet bougé ou la coquille d'un nœud bougé.

8.3.3 Optimisation de la qualité en forme

On regarde ici le critère de forme Q . Ici aussi on va bouger un sommet ou un nœud d'arête avec le même type de validation. Il est vraisemblable que l'on puisse faire mieux que de suivre une méthode empirique en regardant ce qu'est un élément optimal pour ce critère.

9 L'algorithme général

Les grandes lignes de la méthode sont données ici.

- Lecture des faces P2, extraction des faces P1,
- maillage P1 avec les faces P1,
- numérotation des nœuds et calcul de la position des nœuds internes,
- redressement éventuel,
- optimisations,
- écriture des tétraèdres P2.

À noter que l'étape de maillage P1 est réalisée en utilisant le mailleur **Ghs3d**, [9] qui a néanmoins du être modifié en interne bien que la partie purement P2 soit entièrement découplée.

Construction du maillage P1. La construction de ce maillage est classique. Les sommets des faces P1 extraites de la données P2 sont insérés dans une boîte englobante. Les faces P1 sont régénérées. Le domaine est alors défini et saturé par l'insertion de points internes. Pour finir, les tétraèdres sont optimisés en utilisant les méthodes classiques (bougé de sommets et bascule d'arêtes essentiellement) guidées par le critère de qualité en forme.

Position des nœuds d'arête. Les nœuds des arêtes internes sont positionnés au milieu de ces arêtes. Les nœuds des arêtes frontaliers sont mis à leur vrai emplacement.

Redressement. Le maillage P2 actuel peut être juste (directement), comporter un très petit nombre d'éléments non valides ou encore un nombre conséquent de tels éléments. Les causes d'invalidité sont connues, auto-intersection, auto-pénétration, chevauchement, retournement, ... avec (cas délicat) présence de sommets hors le domaine ou (cas nettement plus simple) présence seulement de nœuds d'arête hors le domaine.

L'expérience (basée sur de nombreux exemples) indique une fréquence élevée de cas faciles à résoudre en considérant simplement que la face (l'arête) fautive est relativement similaire à l'une de ses voisines.

Pour les autres cas, il faut mettre en place d'algorithme basé sur la minimisation de l'énergie de déformation du maillage.

Optimisation. L'optimisation repose marginalement sur des bascules de faces et principalement sur le bougé des sommets et des nœuds d'arête. Quand un sommet est bougé, sa grappe est affectée directement (l'ensembles des nœuds adjacents à ce sommet).

10 Tests et exemples

On donne quelques tests de validation et quelques conclusions qualitatives sur ce problème de construction de maillages P2.

10.1 Validation de la structure du code

Les premiers tests ont pour but de vérifier que la structure du code est correcte. Pour valider cet aspect (qui regarde essentiellement les structures de données utilisées et les problèmes de numérotation des nœuds) nous construisons des maillages P2 droits (les arêtes sont simplement coupées en leur milieu) à partir de géométries sans zone courbée.

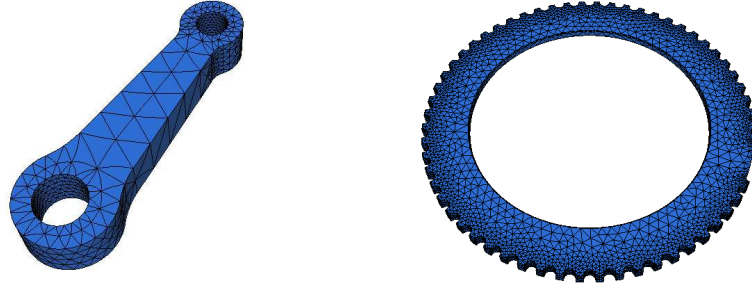


FIG. 5 – Exemples de maillages de surface ne présentant aucune difficulté, la construction des tétraèdres P2 est immédiate (aucune correction n'est nécessaire). À gauche, 5043 éléments, 0.33 sec.. à droite, 41278 éléments, 2.70 sec.

-	np	no	ne	P1	P2	P2-P1
maillage 1	3 966	23 121	16 938	0.67	0.80	0.13
maillage 2	25 280	159 241	125 611	2.76	4.00	1.24
maillage 2	629 612	4 765 801	3 373 339	89.	121.	32.

Tableau 1 : Statistiques sur 3 exemples de maillage P2 droit (Mac OS X, 2.33 GHz Intel Core 2 Duo).

Dans ce tableau, np est le nombre de sommets, no le nombre de nœuds et ne le nombre d'éléments. P1 désigne le temps de construction du maillage P1, P2 celui pour construire le maillage P2, P2-P1 notant le surcoût.

10.2 Nature qualitative des résultats

Le code a été testé sur quelques 200 géométries différentes (essentiellement des pièces mécaniques ayant un ou plusieurs sous-domaines). Les résultats indiquent que :

- on détecte les données fausses avec essentiellement quatre situations :
 - la surface n'est pas P2-P1 compatible, le maillage P1 est alors impossible à construire (auto-intersection en P1, même s'il n'y en a pas en P2),
 - la surface (P2-P1 compatible) est auto-intersectante, au moins deux triangles s'intersectent,
 - la surface (P2-P1 compatible et auto-intersectante ou non) contient des triangles qui s'intersectent eux-mêmes avec le cas des triangles auto-pénétrants, cas moins intuitif.
 - la surface (P2-P1 compatible et auto-intersectante ou non) contient des triangles auto-tangents (à angle nul ou plat).
- pour une donnée correcte, on trouve trois situations :
 - la transformation P1-P2 produit directement un maillage P2 juste,
 - il reste quelques éléments à corriger, chacun très localement, et le résultat est juste,
 - la méthode échoue, le résultat existe mais est *a priori* faux¹⁰.

10.3 Quelques exemples

Les exemples suivants montrent quelques maillages P2 construits sur diverses géométries, la validation ayant été menée en traitant plus de 200 cas différents.

11 Conclusions

Il semble que la méthode proposée produise le résultat espéré dans tous les cas où l'approximation P2 des courbes frontières est suffisamment précise, autrement dit, les seuls cas

¹⁰Il est néanmoins peut être utilisable sous certaines conditions.

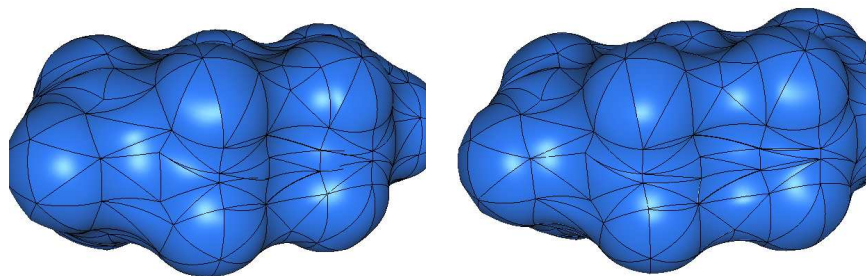


FIG. 6 – Correction d'un maillage surfacique faux (à gauche, le maillage faux) et construction du maillage tétraédrique P2 (à droite), 1141 éléments, 0.82 sec.

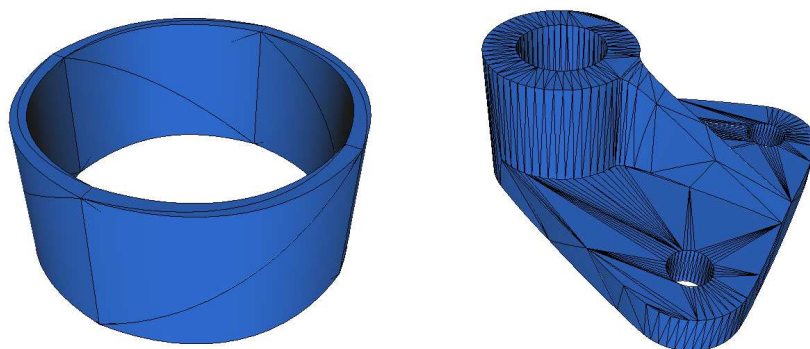


FIG. 7 – À gauche, 48 tétraèdres P2, 0.58 sec. À droite, 1459 éléments P2, 2.90 sec.

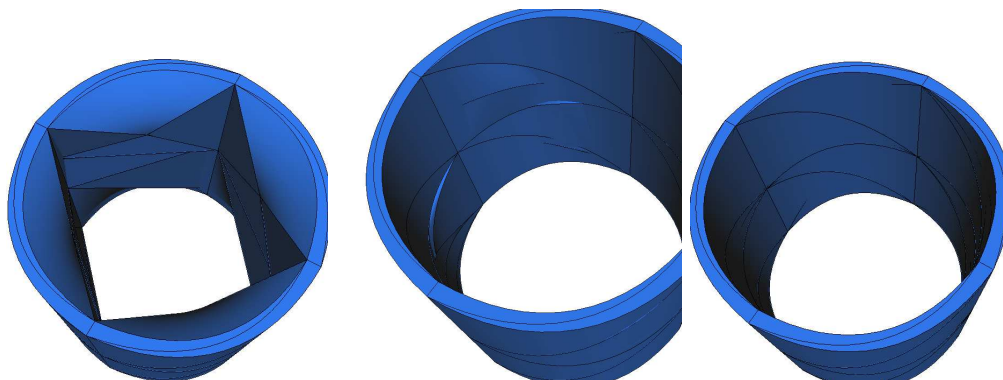


FIG. 8 – Un exemple d'échec de la méthode après minimisation de l'énergie de déformation, 90 tétraèdres P2, il reste deux éléments avec au moins un jacobien négatif, 0.70 sec. À gauche, le maillage avant redressement des nœuds (on est dans le cas où des sommets internes sont à l'extérieur du domaine), au milieu, le résultat qui montre quelques défauts de validité, à droite, le résultat juste.

qui restent problématiques sont ceux où cette approximation est trop mauvaise (arc trop loin de la corde) qui, de toute façon, du point de vue éléments finis, sont connus pour être impropres à tout calcul.

Plus généralement et vu la complexité attendue (nombre de coefficients à calculer et nombre de tests de validité), il n'est pas si évident que monter en ordre soit vraiment réaliste dans le cas de géométries non triviales bien que l'on dispose du cadre théorique nécessaire.

Remerciements. Nous remercions nos collègues de Distène pour les nombreuses données (au delà des cas montrés ici) qu'ils nous ont fournies pour permettre les tests de validation. Cette collaboration s'inscrit puls particulièrement dans le cadre du I-Lab **Gamma3**-Distène. Les visualisations des maillages P2 sont réalisées par un outil graphique développé par Loïc Maréchal sur une base proche du logiciel **Medit**.

Références

- [1] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, **4**, Hermès, Paris, 1986.
- [2] H. BOROUCAKI AND P.L. GEORGE, Quality mesh generation, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Concise review paper, t. 328, Serie II-b, pp. 505-518, 2000.
- [3] H. BOROUCAKI ET P. LAUG, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 2 : Surface P2, à paraître.
- [4] S. DEY, R.M. O'BARA AND M.S. SHEPHARD, Curvilinear mesh generation in 3D, *8th Inter. Meshing Roundtable*, pp. 407-417, 1999.
- [5] P.G. CIARLET, *The Finite Element Method*, North Holland, 1978.
- [6] P.G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in Handbook of Numerical Analysis, vol II, Finite Element methods (Part 1), P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds, North Holland, 17-352, 1991.
- [7] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide*. 5th edition, Academic Press, 2002.
- [8] P.J. FREY AND P.L. GEORGE, *Mesh Generation*, 2nd edition, ISTE and Wiley, 2008.
- [9] P.L. GEORGE *et al.*, *TetMesh-Ghs3d*, mesh generator for tetrahedral element.
- [10] P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI ET P. LAUG, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 1 : Triangle P2, *RR INRIA* **7519**, 2011.
- [11] S.J. SHERWIN AND J. PEIRO, Mesh generation in curvilinear domains using high-order elements, *Int. J. Numer. Meth. and Engng.*, 55, 207-223, 2002.
- [12] X.J. XUO, M.S. SHEPHARD, R.M. O'BARA, R. NATASIA AND M.W. BEAL, Automatic p-version mesh generation for curved domains, *Eng. with Comp.*, 20, 273-285, 2004.
- [13] O. SAHNI, X.J. XUO, K.E. JANSE AND M.S. SHEPHARD, Curved boundary layer meshing for adaptive viscous flow simulations, *FEAD*, 46, 132-139, 2010.

12 Annexes

On donne, en annexe, quelques détails techniques ou pratiques relatifs à divers points abordés dans ce rapport.

- l'Annexe 1 explicite les coefficients N_{ijkl} du tétraèdre P2 en fonction d'instanciations faites sur le tétraèdre de référence P3,
- l'Annexe 2 vérifie que les deux expressions obtenues permettant de calculer les N_{ijkl} sont identiques en regardant l'un de ces coefficients,
- l'Annexe 3 indique comment subdiviser une face ou une arête pour affiner la condition de validité d'un élément,
- l'Annexe 4 donne les coefficients utilisés dans l'algorithme de minimisation de l'énergie de déformation traité directement en P2.

Annexe 1

Dans cette annexe, on explicite tous les coefficients N_{ijkl} du tétraèdre P2 en fonction d'évaluations du jacobien en des nœuds particuliers, ceux du tétraèdre de référence P3. On note \hat{B}_i ces 20 nœuds, on a :

- $\hat{B}_1 = (0, 0, 0)$, $\hat{B}_2 = (1, 0, 0)$, $\hat{B}_3 = (0, 1, 0)$ et $\hat{B}_4 = (0, 0, 1)$
- $\hat{B}_5 = (\frac{1}{3}, 0, 0)$ et $\hat{B}_6 = (\frac{2}{3}, 0, 0)$
- $\hat{B}_7 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ et $\hat{B}_8 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
- $\hat{B}_9 = (0, \frac{2}{3}, 0)$ et $\hat{B}_{10} = (0, \frac{1}{3}, 0)$
- $\hat{B}_{11} = (0, 0, \frac{1}{3})$ et $\hat{B}_{12} = (0, 0, \frac{2}{3})$
- $\hat{B}_{13} = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$ et $\hat{B}_{14} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$
- $\hat{B}_{15} = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et $\hat{B}_{16} = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
- $\hat{B}_{17} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
- $\hat{B}_{18} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$
- $\hat{B}_{19} = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- $\hat{B}_{20} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Alors, les coefficients de contrôle reliés aux sommets sont :

$$\begin{aligned} N_{3000} &= \mathcal{J}(\hat{B}_1) \\ N_{0300} &= \mathcal{J}(\hat{B}_2) \\ N_{0030} &= \mathcal{J}(\hat{B}_3) \\ N_{0003} &= \mathcal{J}(\hat{B}_4). \end{aligned}$$

Les coefficients de contrôle reliés aux arêtes sont :

$$\begin{aligned} N_{2100} &= \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_5) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_6) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6} \\ N_{1200} &= \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_1) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_5) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_6) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6} \\ N_{0210} &= \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_2) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_7) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_8) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_3)}{6} \\ N_{0120} &= \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_2) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_7) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_8) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_3)}{6} \\ N_{1020} &= \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_3) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_9) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_{10}) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_1)}{6} \\ N_{2010} &= \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_3) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_9) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_{10}) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_1)}{6} \\ N_{2001} &= \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_{11}) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_{12}) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_4)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{1002} &= \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_1) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_{11}) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_{12}) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_4)}{6} \\
N_{0201} &= \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_2) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_{13}) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_{14}) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_4)}{6} \\
N_{0102} &= \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_2) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_{13}) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_{14}) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_4)}{6} \\
N_{0021} &= \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_3) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_{15}) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_{16}) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_4)}{6} \\
N_{0012} &= \frac{2\mathcal{J}(\hat{B}_3) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_{15}) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_{16}) - 5\mathcal{J}(\hat{B}_4)}{6}.
\end{aligned}$$

Les coefficients de contrôle reliés aux faces sont :

$$\begin{aligned}
N_{1110} &= \frac{9}{2} \left\{ \mathcal{J}(\hat{B}_{17}) + \frac{2(\mathcal{J}(\hat{B}_1) + \mathcal{J}(\hat{B}_2) + \mathcal{J}(\hat{B}_3))}{27} - \frac{\mathcal{J}(\hat{B}_5) + \mathcal{J}(\hat{B}_6) + \mathcal{J}(\hat{B}_7) + \mathcal{J}(\hat{B}_8) + \mathcal{J}(\hat{B}_9) + \mathcal{J}(\hat{B}_{10})}{6} \right\} \\
N_{1101} &= \frac{9}{2} \left\{ \mathcal{J}(\hat{B}_{18}) + \frac{2(\mathcal{J}(\hat{B}_1) + \mathcal{J}(\hat{B}_2) + \mathcal{J}(\hat{B}_4))}{27} - \frac{\mathcal{J}(\hat{B}_5) + \mathcal{J}(\hat{B}_6) + \mathcal{J}(\hat{B}_{11}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{12}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{13}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{14})}{6} \right\} \\
N_{1011} &= \frac{9}{2} \left\{ \mathcal{J}(\hat{B}_{19}) + \frac{2(\mathcal{J}(\hat{B}_1) + \mathcal{J}(\hat{B}_3) + \mathcal{J}(\hat{B}_4))}{27} - \frac{\mathcal{J}(\hat{B}_9) + \mathcal{J}(\hat{B}_{10}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{11}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{12}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{15}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{16})}{6} \right\} \\
N_{0111} &= \frac{9}{2} \left\{ \mathcal{J}(\hat{B}_{20}) + \frac{2(\mathcal{J}(\hat{B}_2) + \mathcal{J}(\hat{B}_3) + \mathcal{J}(\hat{B}_4))}{27} - \frac{\mathcal{J}(\hat{B}_7) + \mathcal{J}(\hat{B}_8) + \mathcal{J}(\hat{B}_{13}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{14}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{15}) + \mathcal{J}(\hat{B}_{16})}{6} \right\}.
\end{aligned}$$

Annexe 2

On a trouvé deux expressions pour exprimer les coefficients N_{ijkl} , ces deux écritures sont nécessairement égales. On va néanmoins le vérifier explicitement, en regardant le coefficient N_{2100} . Il s'agit donc de montrer que l'écriture de la Relation (10) et la formule rappelée ci-dessus dans l'Annexe 1 sont identiques.

Calcul de $\mathcal{J}(\hat{B}_5)$ donc pour $\hat{x} = \frac{1}{3}, \hat{y} = \hat{z} = 0$:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 0 & -4 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

donc :

$$\begin{aligned}
3\vec{u} &= -5A_1 + A_2 + 4A_5 \\
3\vec{v} &= -5A_1 - 3A_3 - 4A_5 + 4A_6 + 8A_7 \\
3\vec{w} &= -5A_1 - 3A_4 - 4A_5 + 8A_8 + 4A_9,
\end{aligned}$$

on exprime les A_i en fonction des C_i , pour $i \geq 5$, il vient :

$$\begin{aligned}
3\vec{u} &= -4A_1 + 2A_2 + 2C_5 = 2\overrightarrow{A_1C_5} + 2\overrightarrow{A_1A_2} \\
3\vec{v} &= -4A_1 - 2C_5 + 2C_6 + 4C_7 = 4\overrightarrow{A_1C_7} + 2\overrightarrow{C_5C_6} \\
3\vec{w} &= -4A_1 - 2C_5 + 4C_8 + 2C_9 = 4\overrightarrow{A_1C_8} + 2\overrightarrow{C_5C_9}.
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathcal{J}(\hat{B}_6)$ donc pour $\hat{x} = \frac{2}{3}, \hat{y} = \hat{z} = 0$:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -8 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

donc :

$$3\vec{u} = -A_1 + 5A_2 - 4A_5$$

$$3\vec{v} = -A_1 - 3A_3 - 8A_5 + 8A_6 + 4A_7$$

$$3\vec{w} = -A_1 - 3A_4 - 8A_5 + 4A_8 + 8A_9,$$

on exprime les A_i en fonction des C_i , pour $i \geq 5$, il vient :

$$3\vec{u} = -2A_1 + 4A_2 - 2C_5 = 2\overrightarrow{A_1A_2} + 2\overrightarrow{C_5A_2}$$

$$3\vec{v} = -2A_1 - 4C_5 + 4C_6 + 2C_7 = 2\overrightarrow{A_1C_7} + 4\overrightarrow{C_5C_6}$$

$$3\vec{w} = -2A_1 - 4C_5 + 2C_8 + 4C_9 = 2\overrightarrow{A_1C_8} + 4\overrightarrow{C_5C_9}.$$

Comme

$$\mathcal{J}(\hat{B}_1) = 8 |\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}|,$$

$$\mathcal{J}(\hat{B}_2) = 8 |\overrightarrow{A_2C_6} \overrightarrow{A_2C_5} \overrightarrow{A_2C_9}|,$$

et

$$N_{2100} = \frac{-5\mathcal{J}(\hat{B}_1) + 18\mathcal{J}(\hat{B}_5) - 9\mathcal{J}(\hat{B}_6) + 2\mathcal{J}(\hat{B}_2)}{6},$$

en remplaçant les \mathcal{J} , on obtient :

$$6 N_{2100} = -40 |\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| + \frac{2}{3} \left(|2\overrightarrow{A_1C_5} + 2\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} + 2\overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} + 2\overrightarrow{C_5C_9}| \right) \\ - \frac{1}{3} \left(|2\overrightarrow{A_1A_2} + 2\overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{A_1C_7} + 4\overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} + 4\overrightarrow{C_5C_9}| \right) + 16 |\overrightarrow{A_2C_6} \overrightarrow{A_2C_5} \overrightarrow{A_2C_9}|,$$

que l'on éclate, terme à terme, en numérotant les termes pour les suivre, il vient :

(T1)	$-40 \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T3)	$\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T2)	$\frac{64}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T5)	$\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T4)	$\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T7)	$\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T6)	$\frac{64}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T9)	$\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T8)	$\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T11)	$-\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T10)	$-\frac{8}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T13)	$-\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T12)	$-\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T15)	$-\frac{16}{3} \overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T14)	$-\frac{8}{3} \overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T17)	$-\frac{32}{3} \overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T16)	$-\frac{16}{3} \overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $		
(T18)	$16 \overrightarrow{A_2C_6} \overrightarrow{A_2C_5} \overrightarrow{A_2C_9} $		

$T6$ et $T10$ se regroupent, tout comme $T7$ et $T11$ ainsi que $T8$ et $T12$ et, enfin, $T9$ et $T13$. Il reste :

(T1)	$-40 \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T3)	$\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T2)	$\frac{64}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T5)	$\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T4)	$\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T7)	$\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T6)	$\frac{56}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T9)	$-\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T8)	$\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T15)	$-\frac{16}{3} \overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T14)	$-\frac{8}{3} \overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T17)	$-\frac{32}{3} \overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T16)	$-\frac{16}{3} \overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $		
(T18)	$16 \overrightarrow{A_2C_6} \overrightarrow{A_2C_5} \overrightarrow{A_2C_9} $		

On casse $\overrightarrow{C_5A_2}$ de $T14$ à $T17$ en introduisant A_1 , il vient :

(T1)	$-40 \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T3)	$\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T2)	$\frac{64}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T5)	$\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T4)	$\frac{32}{3} \overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T7)	$\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T6)	$\frac{56}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8} $	(T9)	$-\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9} $
(T8)	$\frac{16}{3} \overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8} $		

$$\begin{aligned}
(T14) \quad & -\frac{8}{3}|\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| \text{ et } -\frac{8}{3}|\overrightarrow{C_5A_1} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T15) \quad & -\frac{16}{3}|\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9}| \text{ et } -\frac{16}{3}|\overrightarrow{C_5A_1} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T16) \quad & -\frac{16}{3}|\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}| \text{ et } -\frac{16}{3}|\overrightarrow{C_5A_1} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T17) \quad & -\frac{32}{3}|\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9}| \text{ et } -\frac{32}{3}|\overrightarrow{C_5A_1} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T18) \quad & 16|\overrightarrow{A_2C_6} \overrightarrow{A_2C_5} \overrightarrow{A_2C_9}|.
\end{aligned}$$

$T14$, premier terme, se regroupe avec $T6$, $T14$, second terme, se regroupe avec $T2$ puis avec $T1$, $T15$, premier terme, annule $T7$, $T15$, second terme, se regroupe avec $T3$, $T16$, premier terme, annule $T8$, $T16$, second terme, se regroupe avec $T4$, $T17$, premier terme, se regroupe avec $T9$, $T17$, second terme, se regroupe avec $T5$, il reste :

$$\begin{aligned}
(T1) \quad & -16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T3) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T4) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T5) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T6) \quad & 16|\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T9) \quad & -16|\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T18) \quad & 16|\overrightarrow{A_2C_6} \overrightarrow{A_2C_5} \overrightarrow{A_2C_9}|.
\end{aligned}$$

On casse $\overrightarrow{A_1A_2}$ de $T9$ en introduisant C_5 , $T5$ s'annule et $T9$ se réécrit avec C_5 .

$$\begin{aligned}
(T1) \quad & -16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T3) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T4) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T6) \quad & 16|\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T9) \quad & -16|\overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T18) \quad & 16|\overrightarrow{A_2C_6} \overrightarrow{A_2C_5} \overrightarrow{A_2C_9}|.
\end{aligned}$$

On casse $\overrightarrow{C_5C_6}$ et $\overrightarrow{C_5C_9}$ de $T9$ en introduisant A_2 , alors $T9$ et $T18$ s'annulent, il reste alors :

$$\begin{aligned}
(T1) \quad & -16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T3) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T4) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T6) \quad & 16|\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}|.
\end{aligned}$$

On casse $\overrightarrow{A_1A_2}$ de $T6$ en introduisant C_5 , alors $T1$ est annulé et il reste :

$$\begin{aligned}
(T3) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T4) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T6) \quad & 16|\overrightarrow{C_5A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}|.
\end{aligned}$$

On ouvre $\overrightarrow{C_5A_2}$ de $T6$ avec C_9 , il vient :

$$(T6) \quad 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}| \text{ et } 16|\overrightarrow{C_9A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}|,$$

soit $det = |\overrightarrow{C_9A_2} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}|$, il est clair que det est l'opposé du terme du milieu de la Relation (10). Il reste donc :

$$\begin{aligned}
(T3) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_9}| \\
(T4) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T6) \quad & 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{A_1C_8}|,
\end{aligned}$$

on ouvre $\overrightarrow{A_1C_8}$ de $T6$ par C_5 , $T3$ est annulé et il reste

$$\begin{aligned}
(T4) \quad & 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}| \\
(T6) \quad & 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_7} \overrightarrow{C_5C_8}|,
\end{aligned}$$

on ouvre $\overrightarrow{A_1C_7}$ de T_6 par C_8 , il vient

$$(T4) \quad 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}|$$

$$(T6) \quad 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_8} \overrightarrow{C_5C_8}| \text{ et } 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{C_8C_7} \overrightarrow{C_5C_8}|,$$

soit $det = |\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_8} \overrightarrow{C_5C_8}|$, il est clair que det est l'opposé du terme de droite de la Relation (10). Il reste donc :

$$(T4) \quad 16|\overrightarrow{A_1C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}|$$

$$(T6) \quad 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_8} \overrightarrow{C_5C_8}|,$$

on ouvre $\overrightarrow{A_1C_5}$ de T_4 par C_8 , il vient

$$(T4) \quad 16|\overrightarrow{C_8C_5} \overrightarrow{C_5C_6} \overrightarrow{A_1C_8}|$$

$$(T6) \quad 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_8} \overrightarrow{C_5C_8}|,$$

on ouvre $\overrightarrow{C_5C_6}$ de T_4 en C_9 , il vient

$$(T4) \quad 16|\overrightarrow{C_8C_5} \overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_8}| \text{ et } 16|\overrightarrow{C_8C_5} \overrightarrow{C_9C_6} \overrightarrow{A_1C_8}|$$

$$(T6) \quad 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_8} \overrightarrow{C_5C_8}|,$$

soit $det = |\overrightarrow{C_8C_5} \overrightarrow{C_9C_6} \overrightarrow{A_1C_8}|$, det est le premier terme, au signe près, de la Relation (10). Il reste, dans la somme initiale :

$$(T4) \quad 16|\overrightarrow{C_8C_5} \overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_8}|$$

$$(T6) \quad 16|\overrightarrow{C_5C_9} \overrightarrow{A_1C_8} \overrightarrow{C_5C_8}|,$$

qui s'annulent. Fin, on a retrouvé les 3 termes de la solution avec le bon coefficient $(-\frac{8}{3})$.

Annexe 3

On donne ici les coefficients associés à une subdivision des 4 faces d'un tétraèdre P2 selon le coefficient (négatif) que l'on cherche à affiner.

Face $t = 0$, subdivision de la face. Les N_{ijkl} , relatifs à la face $t = 0$, forment le réseau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & N_{0030} & & \\ & & & & & & \\ & & & & N_{1020} & N_{0120} & \\ & & & & N_{2010} & N_{1110} & N_{0210} \\ & & & & N_{3000} & N_{2100} & N_{1200} & N_{0300}, \end{array}$$

au rang 1, l'algorithme de De Casteljau construit les N_{ijkl}^1 du réseau :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & N_{1020}^1 & & \\ & & & & & & \\ & & & & N_{2010}^1 & N_{1110}^1 & \\ & & & & N_{3000}^1 & N_{2100}^1 & N_{1200}^1, \end{array}$$

au rang 2, l'algorithme de De Casteljau construit les N_{ijkl}^2 du réseau :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & N_{2010}^2 & & \\ & & & & & & \\ & & & & N_{3000}^2 & N_{2100}^2. \end{array}$$

Cet algorithme permet d'évaluer toute valeur $P(u, v, w, t)$ en fonction des N_{ijkl}^2 calculés à partir des N_{ijkl}^1 , eux-mêmes définis en fonction des N_{ijkl} initiaux. La subdivision en trois en introduisant $P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ consiste à faire $u = v = w = \frac{1}{3}$ et $t = 0$. Le calcul des coefficients N_{ijkl}^1 , N_{ijkl}^2 puis N_{ijkl}^3 se formule de manière générique. Notons que N_{ijkl} , N_{ijkl}^1 et N_{ijkl}^2 sont

des coefficients de contrôle tandis que N_{ijkl}^3 est l'évaluation d'une valeur courante. L'écriture générique est la suivante :

$$\begin{cases} N_{i,j,k,l}^1 = uN_{i,j,k,l} + vN_{i-1,j+1,k,l} + wN_{i-1,j,k+1,l} & \text{pour } i = 3, 2, 1, i+j+k=3, \text{ et } l=0, \\ N_{i,j,k,l}^2 = uN_{i,j,k,l}^1 + vN_{i-1,j+1,k,l}^1 + wN_{i-1,j,k+1,l}^1 & \text{pour } i = 3, 2, i+j+k=3, \text{ et } l=0, \\ N_{i,j,k,l}^3 = uN_{i,j,k,l}^2 + vN_{i-1,j+1,k,l}^2 + wN_{i-1,j,k+1,l}^2 & \text{pour } i = 3, i+j+k=3, \text{ et } l=0, \end{cases} \quad (22)$$

et, donc, pour $u = v = w = \frac{1}{3}$ et $t = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} N_{i,j,k,l}^1 = \frac{N_{i,j,k,l} + N_{i-1,j+1,k,l} + N_{i-1,j,k+1,l}}{3} & \text{pour } i = 3, 2, 1 \text{ avec } i+j+k=3 \text{ et } l=0, \\ N_{i,j,k,l}^2 = \frac{N_{i,j,k,l}^1 + N_{i-1,j+1,k,l}^1 + N_{i-1,j,k+1,l}^1}{3} & \text{pour } i = 3, 2 \text{ avec } i+j+k=3 \text{ et } l=0, \\ N_{i,j,k,l}^3 = \frac{N_{i,j,k,l}^2 + N_{i-1,j+1,k,l}^2 + N_{i-1,j,k+1,l}^2}{3} & \text{pour } i = 3 \text{ avec } i+j+k=3 \text{ et } l=0. \end{cases} \quad (23)$$

Ainsi, pour le rang 1, on obtient :

$$\begin{aligned} N_{3000}^1 &= \frac{N_{3000} + N_{2100} + N_{2010}}{3} \\ N_{2100}^1 &= \frac{N_{2100} + N_{1200} + N_{1110}}{3} \\ N_{1200}^1 &= \frac{N_{1200} + N_{0300} + N_{0210}}{3} \\ N_{2010}^1 &= \frac{N_{2010} + N_{1110} + N_{1020}}{3} \\ N_{1110}^1 &= \frac{N_{1110} + N_{0210} + N_{0120}}{3} \\ N_{1020}^1 &= \frac{N_{1020} + N_{0120} + N_{0030}}{3} \end{aligned}$$

puis, pour le rang 2, on trouve :

$$\begin{aligned} N_{3000}^2 &= \frac{N_{3000}^1 + N_{2100}^1 + N_{2010}^1}{3} \\ N_{2100}^2 &= \frac{N_{2100}^1 + N_{1200}^1 + N_{1110}^1}{3} \\ N_{2010}^2 &= \frac{N_{2010}^1 + N_{1110}^1 + N_{1020}^1}{3}, \end{aligned}$$

et, on a, pour mémoire :

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = N_{3000}^3,$$

avec, donc :

$$N_{3000}^3 = \frac{N_{3000}^2 + N_{2100}^2 + N_{2010}^2}{3}.$$

Le polynôme initial qui s'écrit

$$\begin{aligned} P(u, v, w, 0) &= u^3 N_{3000} + 3u^2 v N_{2100} + 3uv^2 N_{1200} + v^3 N_{0300} + 3v^2 w N_{0210} + 3vw^2 N_{0120} + w^3 N_{0030} \\ &\quad + 3uw^2 N_{1020} + 3u^2 w N_{2010} + 6uvw N_{1110}, \end{aligned}$$

est remplacé par les trois polynômes suivants :

$$\begin{aligned} P(u, v, w, 0) &= u^3 N_{3000} + 3u^2 v N_{2100} + 3uv^2 N_{1200} + v^3 N_{0300} + 3v^2 w N_{1200}^1 + 3vw^2 N_{2100}^2 + w^3 N_{3000}^3 \\ &\quad + 3uw^2 N_{3000}^2 + 3u^2 w N_{3000}^1 + 6uvw N_{2100}^1, \end{aligned}$$

$$P(u, v, w, 0) = u^3 N_{3000}^3 + 3u^2 v N_{2100}^2 + 3uv^2 N_{1200}^1 + v^3 N_{0300} + 3v^2 w N_{0210} + 3vw^2 N_{0120} + w^3 N_{0030} \\ + 3uw^2 N_{1020}^1 + 3u^2 w N_{2010}^2 + 6uvw N_{1110}^1,$$

$$P(u, v, w, 0) = u^3 N_{3000} + 3u^2 v N_{3000}^1 + 3uv^2 N_{3000}^2 + v^3 N_{3000}^3 + 3v^2 w N_{2010}^2 + 3vw^2 N_{1020}^1 + w^3 N_{0030} \\ + 3uw^2 N_{1020} + 3u^2 w N_{2010} + 6uvw N_{2010}^1.$$

Ces trois polynômes sont, dans leur domaine d'application respectif, égaux au polynôme initial et, bien sûr, égaux entre eux sur leur partie commune.

Face $t = 0$, subdivision des arêtes de la face. La subdivision en deux, est à appliquer pour construire une subdivision dans le cas où un N_{ijkl} est non positif "sur" une arête de la face, par suite, six tels coefficients peuvent être considéré. La forme générique, (23), s'applique avec les valeurs des paramètres correspondant aux différents cas. Par exemple, pour $u = v = \frac{1}{2}$ et $w = t = 0$,

$$N_{i,j,k,l}^1 = uN_{i,j,k,l} + vN_{i-1,j+1,k,l} + wN_{i-1,j,k+1,l} \text{ pour } i = 3, 2, 1, i + j + k = 3, \text{ et } l = 0,$$

se réduit à :

$$N_{i,j,k,l}^1 = \frac{N_{i,j,k,l} + N_{i-1,j+1,k,l}}{2} \text{ pour } i = 3, 2, 1 \text{ avec } i + j = 3 \text{ et } k = l = 0,$$

et des formules analogues pour les autres valeurs. Par suite, on obtient facilement tous les coefficients qui nous intéressent :

- pour N_{2100} ou pour N_{1200} , $u = v = \frac{1}{2}$ et $w = t = 0$, on trouve au rang un :

$$N_{3000}^1 = \frac{N_{3000} + N_{2100}}{2}$$

$$N_{2100}^1 = \frac{N_{2100} + N_{1200}}{2}$$

$$N_{1200}^1 = \frac{N_{1200} + N_{0300}}{2},$$

puis, au rang deux :

$$N_{3000}^2 = \frac{N_{3000}^1 + N_{2100}^1}{2}$$

$$N_{2100}^2 = \frac{N_{2100}^1 + N_{1200}^1}{2}.$$

- pour N_{0210} ou pour N_{0120} , $v = w = \frac{1}{2}$ et $u = t = 0$, on trouve au rang un :

$$N_{0300}^1 = \frac{N_{0300} + N_{0210}}{2}$$

$$N_{0210}^1 = \frac{N_{0210} + N_{0120}}{2}$$

$$N_{0120}^1 = \frac{N_{0120} + N_{0030}}{2},$$

puis, au rang deux :

$$N_{0300}^2 = \frac{N_{0300}^1 + N_{0210}^1}{2}$$

$$N_{0210}^2 = \frac{N_{0210}^1 + N_{0120}^1}{2}.$$

- pour N_{1020} ou pour N_{2010} , $u = w = \frac{1}{2}$ et $v = t = 0$, on trouve au rang un :

$$N_{0030}^1 = \frac{N_{0030} + N_{1020}}{2}$$

$$N_{1020}^1 = \frac{N_{1020} + N_{2010}}{2}$$

$$N_{2010}^1 = \frac{N_{2010} + N_{3000}}{2},$$

puis, au rang deux :

$$N_{0030}^2 = \frac{N_{0030}^1 + N_{1020}^1}{2}$$

$$N_{1020}^2 = \frac{N_{1020}^1 + N_{2010}^1}{2}.$$

En pratique, la formule est simple, on considère les coefficients liés aux arêtes et on fait les moyennes 2 à 2 pour obtenir le rang 1 (3 valeurs) puis, à partir de ce rang, on recommence pour avoir les coefficients du rang 2 (2 valeurs).

Avec ces nouveaux coefficients et l'évaluation voulue, on remplace le polynôme initial par deux polynômes qui lui sont égaux dans leur plage d'application.

Face $w = 0$, subdivision de la face. Les N_{ijkl} , relatifs à la face $w = 0$, forment le réseau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & N_{0003} & & & & \\ & & & & & & \\ & N_{1002} & & N_{0102} & & & \\ & & & & & & \\ N_{2001} & & N_{1101} & & N_{0201} & & \\ & & & & & & \\ N_{3000} & & N_{2100} & & N_{1200} & & N_{0300}, \end{array}$$

il suffit¹¹ d'appliquer la même mécanique que pour la face explicitée entièrement ci-dessus pour trouver la valeur des coefficients affinés en suivant les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{i,j,k,l}^1 = \frac{N_{i,j,k,l} + N_{i-1,j+1,k,l} + N_{i-1,j,k,l+1}}{3} \text{ pour } i = 3, 2, 1 \text{ avec } i + j + l = 3 \text{ et } k = 0, \\ N_{i,j,k,l}^2 = \frac{N_{i,j,k,l}^1 + N_{i-1,j+1,k,l}^1 + N_{i-1,j,k,l+1}^1}{3} \text{ pour } i = 3, 2 \text{ avec } i + j + l = 3 \text{ et } k = 0, \\ N_{i,j,k,l}^3 = \frac{N_{i,j,k,l}^2 + N_{i-1,j+1,k,l}^2 + N_{i-1,j,k,l+1}^2}{3} \text{ pour } i = 3 \text{ avec } i + j + l = 3 \text{ et } k = 0. \end{array} \right. \quad (24)$$

Face $w = 0$, subdivision des arêtes de la face.

- pour N_{2100} ou pour N_{1200} , $u = v = \frac{1}{2}$ et $w = t = 0$, déjà vu pour la face $t = 0$.
- pour N_{2001} ou pour N_{1002} , $u = t = \frac{1}{2}$ et $v = w = 0$, on trouve au rang un :

$$N_{3000}^1 = \frac{N_{3000} + N_{2001}}{2}$$

$$N_{2001}^1 = \frac{N_{2001} + N_{1002}}{2}$$

$$N_{1002}^1 = \frac{N_{1002} + N_{0003}}{2},$$

puis, au rang deux :

$$N_{3000}^2 = \frac{N_{3000}^1 + N_{2001}^1}{2}$$

$$N_{2001}^2 = \frac{N_{2001}^1 + N_{1002}^1}{2}.$$

¹¹yaka

– pour N_{0201} ou pour N_{0102} , $v = t = \frac{1}{2}$ et $u = w = 0$, on trouve au rang un :

$$N_{0300}^1 = \frac{N_{0300} + N_{0201}}{2}$$

$$N_{0201}^1 = \frac{N_{0201} + N_{0102}}{2}$$

$$N_{0102}^1 = \frac{N_{0102} + N_{0003}}{2},$$

puis, au rang deux :

$$N_{0300}^2 = \frac{N_{0300}^1 + N_{0201}^1}{2}$$

$$N_{0201}^2 = \frac{N_{0201}^1 + N_{0102}^1}{2}.$$

Face $v = 0$, subdivision de la face. Les N_{ijkl} , relatifs à la face $v = 0$, forment le réseau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & N_{0003} & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & N_{1002} & N_{0012} & \\ & & & & & & \\ & & & & N_{2001} & N_{1011} & N_{0021} \\ & & & & & & \\ & & & & N_{3000} & N_{2010} & N_{1020} & N_{0030}, \end{array}$$

et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{i,j,k,l}^1 = \frac{N_{i,j,k,l} + N_{i-1,j,k+1,l} + N_{i-1,j,k,l+1}}{3} \text{ pour } i = 3, 2, 1 \text{ avec } i + k + l = 3 \text{ et } j = 0, \\ N_{i,j,k,l}^2 = \frac{N_{i,j,k,l}^1 + N_{i-1,j,k+1,l}^1 + N_{i-1,j,k,l+1}^1}{3} \text{ pour } i = 3, 2 \text{ avec } i + k + l = 3 \text{ et } j = 0, \\ N_{i,j,k,l}^3 = \frac{N_{i,j,k,l}^2 + N_{i-1,j,k,l+1}^2 + N_{i-1,j,k+1,l}^2}{3} \text{ pour } i = 3 \text{ avec } i + k + l = 3 \text{ et } j = 0. \end{array} \right. \quad (25)$$

Face $v = 0$, subdivision des arêtes de la face.

- pour N_{2010} ou pour N_{1020} , $u = w = \frac{1}{2}$ et $v = t = 0$, déjà vu pour la face $t = 0$.
- pour N_{2001} ou pour N_{1002} , $u = t = \frac{1}{2}$ et $v = w = 0$, déjà vu pour la face $w = 0$.
- pour N_{0021} ou pour N_{0012} , $w = t = \frac{1}{2}$ et $u = v = 0$, on trouve au rang un :

$$N_{0030}^1 = \frac{N_{0030} + N_{0021}}{2}$$

$$N_{0021}^1 = \frac{N_{0021} + N_{0012}}{2}$$

$$N_{0012}^1 = \frac{N_{0012} + N_{0003}}{2},$$

puis, au rang deux :

$$N_{0030}^2 = \frac{N_{0030}^1 + N_{0021}^1}{2}$$

$$N_{0021}^2 = \frac{N_{0021}^1 + N_{0012}^1}{2}.$$

Face $u = 0$, subdivision de la face. Les N_{ijkl} , relatifs à la face $u = 0$, forment le réseau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & N_{0003} & & \\ & & & & & & \\ & & & & N_{0102} & N_{0012} & \\ & & & & & & \\ & & & & N_{0201} & N_{0111} & N_{0021} \\ & & & & & & \\ & & & & N_{0300} & N_{0210} & N_{0120} & N_{0030}, \end{array}$$

et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{i,j,k,l}^1 = \frac{N_{i,j,k,l} + N_{i,j-1,k+1,l} + N_{i,j-1,k,l+1}}{3} \text{ pour } j = 3, 2, 1 \text{ avec } j + k + l = 3 \text{ et } i = 0, \\ N_{i,j,k,l}^2 = \frac{N_{i,j,k,l}^1 + N_{i,j-1,k+1,l}^1 + N_{i,j-1,k,l+1}^1}{3} \text{ pour } j = 3, 2, 1 \text{ avec } j + k + l = 3 \text{ et } i = 0, \\ N_{i,j,k,l}^3 = \frac{N_{i,j,k,l}^2 + N_{i,j-1,k+1,l}^2 + N_{i,j-1,k,l+1}^2}{3} \text{ pour } j = 3, 2, 1 \text{ avec } j + k + l = 3 \text{ et } i = 0. \end{array} \right. \quad (26)$$

Face $u = 0$, subdivision des arêtes de la face. Les coefficients ont déjà été explicites.

Annexe 4

On donne ici les coefficients associés à l'algorithme de minimisation de l'énergie de déformation, Relation (21).

Nœud en position 1.

$$\begin{aligned} a_{1K} &= \frac{3(<\vec{S}_1.\vec{S}_2> + <\vec{S}_1.\vec{S}_3> + <\vec{S}_1.\vec{S}_4>)}{V} \\ b_{1K} &= \frac{<\vec{S}_1.\vec{S}_2>}{V}(-4u_5 + u_2) + \frac{<\vec{S}_1.\vec{S}_3>}{V}(-4u_7 + u_3) + \frac{<\vec{S}_1.\vec{S}_4>}{V}(-4u_8 + u_4). \end{aligned}$$

En fait, cette écriture est évidemment générique et permet de trouver facilement les 3 autres jeux de coefficients associés aux sommets. Deux méthodes, trouver par permutation ces valeurs, comme ci-dessous, ou, plus simple, permuter l'élément traité pour se placer toujours dans le cas de la position 1. Par exemple, le tétraèdre

$$[1, 2, 3, 4][5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

avec le sommet 1 et le nœud 5 en première position s'écrit également :

$$[2, 3, 1, 4][6, 7, 5, 8, 10, 8]$$

avec le sommet 2 et le nœud 6 en première position maintenant.

Nœud en position 2.

$$\begin{aligned} a_{2K} &= \frac{3(<\vec{S}_2.\vec{S}_3> + <\vec{S}_2.\vec{S}_1> + <\vec{S}_2.\vec{S}_4>)}{V} \\ b_{2K} &= \frac{<\vec{S}_2.\vec{S}_3>}{V}(-4u_6 + u_3) + \frac{<\vec{S}_2.\vec{S}_1>}{V}(-4u_5 + u_1) + \frac{<\vec{S}_2.\vec{S}_4>}{V}(-4u_9 + u_4). \end{aligned}$$

Nœud en position 3.

$$\begin{aligned} a_{3K} &= \frac{3(<\vec{S}_3.\vec{S}_1> + <\vec{S}_3.\vec{S}_2> + <\vec{S}_3.\vec{S}_4>)}{V} \\ b_{3K} &= \frac{<\vec{S}_3.\vec{S}_1>}{V}(-4u_7 + u_1) + \frac{<\vec{S}_3.\vec{S}_2>}{V}(-4u_6 + u_2) + \frac{<\vec{S}_3.\vec{S}_4>}{V}(-4u_{10} + u_4). \end{aligned}$$

Nœud en position 4.

$$a_{4K} = \frac{3(\langle \vec{S}_4 \cdot \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_4 \cdot \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_4 \cdot \vec{S}_2 \rangle)}{V}$$

$$b_{4K} = \frac{\langle \vec{S}_4 \cdot \vec{S}_1 \rangle}{V}(-4u_8 + u_1) + \frac{\langle \vec{S}_4 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{V}(-4u_{10} + u_3) + \frac{\langle \vec{S}_4 \cdot \vec{S}_2 \rangle}{V}(-4u_9 + u_2).$$

Nœud en position 5. On repart de l'expression générale de $E(K)$, pour u_5 , dans sa dérivée contribuent, *a priori* 6 termes, en fait, seuls 4 sont non nuls, on trouve :

$$\frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle}{V}(U_1 - U_2)(2\beta - 2\alpha) + \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{V}(U_1 - U_3)(2\beta) + \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{V}(U_1 - U_4)(2\beta)$$

$$+ \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{V}(U_2 - U_3)(2\alpha) + \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{V}(U_2 - U_4)(2\alpha) + 0,$$

en effet, le terme en $U_3 - U_4$ ne contribue pas et comme $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, il ne reste que :

$$\frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{V}(U_1 - U_3) + \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{V}(U_1 - U_4) + \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{V}(U_2 - U_3) + \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{V}(U_2 - U_4),$$

comme $U_1 = \frac{v_1 + v_5}{2}$, $U_2 = \frac{v_5 + v_2}{2}$, $U_3 = \frac{v_7 + v_6}{2}$ et $U_4 = \frac{v_8 + v_9}{2}$, on obtient la relation :

$$\frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{4V}(4u_5 - 4u_6 - 4u_7 + 2u_1 + 2u_3) + \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{4V}(4u_5 - 4u_8 - 4u_9 + 2u_1 + 2u_4)$$

$$+ \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{4V}(4u_5 - 4u_6 - 4u_7 + 2u_2 + 2u_3) + \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{4V}(4u_5 - 4u_8 - 4u_9 + 2u_2 + 2u_4),$$

d'où on tire

$$a_{5K} = \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_4 \rangle + \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{V}$$

et

$$b_{5K} = \frac{1}{2V} \left\{ \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle (-2u_6 - 2u_7 + u_1 + u_3) + \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_4 \rangle (-2u_8 - 2u_9 + u_1 + u_4) \right.$$

$$\left. + \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle (-2u_6 - 2u_7 + u_2 + u_3) + \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_4 \rangle (-2u_8 - 2u_9 + u_2 + u_4) \right\}.$$

On en déduit, par permutation, les autres cas.

Nœud en position 6.

$$a_{6K} = \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_4 \rangle + \langle \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{V}$$

et

$$b_{6K} = \frac{1}{2V} \left\{ \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_1 \rangle (-2u_5 - 2u_7 + u_2 + u_1) + \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_4 \rangle (-2u_9 - 2u_{10} + u_2 + u_4) \right.$$

$$\left. + \langle \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1 \rangle (-2u_5 - 2u_7 + u_3 + u_1) + \langle \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_4 \rangle (-2u_9 - 2u_{10} + u_3 + u_4) \right\}.$$

Nœud en position 7.

$$a_{7K} = \frac{\langle \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_2 \rangle + \langle \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_4 \rangle + \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle + \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_4 \rangle}{V}$$

et

$$b_{7K} = \frac{1}{2V} \left\{ \langle \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_2 \rangle (-2u_5 - 2u_6 + u_3 + u_2) + \langle \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_4 \rangle (-2u_8 - 2u_{10} + u_3 + u_4) \right.$$

$$\left. + \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle (-2u_5 - 2u_6 + u_1 + u_2) + \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_4 \rangle (-2u_8 - 2u_{10} + u_1 + u_4) \right\}.$$

Nœud en position 8.

$$a_{8K} = \frac{\langle \vec{S}_4, \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_4, \vec{S}_2 \rangle + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle}{V}$$

et

$$b_{8K} = \frac{1}{2V} \left\{ \langle \vec{S}_4, \vec{S}_3 \rangle (-2u_7 - 2u_{10} + u_4 + u_3) + \langle \vec{S}_4, \vec{S}_2 \rangle (-2u_5 - 2u_9 + u_4 + u_2) \right. \\ \left. + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_3 \rangle (-2u_7 - 2u_{10} + u_1 + u_3) + \langle \vec{S}_1, \vec{S}_2 \rangle (-2u_5 - 2u_9 + u_1 + u_2) \right\}.$$

Nœud en position 9.

$$a_{9K} = \frac{\langle \vec{S}_4, \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_4, \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_2, \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_2, \vec{S}_3 \rangle}{V}$$

et

$$b_{9K} = \frac{1}{2V} \left\{ \langle \vec{S}_4, \vec{S}_1 \rangle (-2u_8 - 2u_5 + u_4 + u_1) + \langle \vec{S}_4, \vec{S}_3 \rangle (-2u_6 - 2u_{10} + u_4 + u_3) \right. \\ \left. + \langle \vec{S}_2, \vec{S}_1 \rangle (-2u_8 - 2u_5 + u_2 + u_1) + \langle \vec{S}_2, \vec{S}_3 \rangle (-2u_6 - 2u_{10} + u_2 + u_3) \right\}.$$

Nœud en position 10.

$$a_{10K} = \frac{\langle \vec{S}_4, \vec{S}_2 \rangle + \langle \vec{S}_4, \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_3, \vec{S}_2 \rangle + \langle \vec{S}_3, \vec{S}_1 \rangle}{V}$$

et

$$b_{10K} = \frac{1}{2V} \left\{ \langle \vec{S}_4, \vec{S}_2 \rangle (-2u_6 - 2u_9 + u_4 + u_2) + \langle \vec{S}_4, \vec{S}_1 \rangle (-2u_7 - 2u_8 + u_4 + u_1) \right. \\ \left. + \langle \vec{S}_3, \vec{S}_2 \rangle (-2u_6 - 2u_9 + u_3 + u_2) + \langle \vec{S}_3, \vec{S}_1 \rangle (-2u_7 - 2u_8 + u_3 + u_1) \right\}.$$



Centre de recherche INRIA Paris – Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Centre de recherche INRIA Bordeaux – Sud Ouest : Domaine Universitaire - 351, cours de la Libération - 33405 Talence Cedex
Centre de recherche INRIA Grenoble – Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier
Centre de recherche INRIA Lille – Nord Europe : Parc Scientifique de la Haute Borne - 40, avenue Halley - 59650 Villeneuve d'Ascq
Centre de recherche INRIA Nancy – Grand Est : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex
Centre de recherche INRIA Rennes – Bretagne Atlantique : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex
Centre de recherche INRIA Saclay – Île-de-France : Parc Orsay Université - ZAC des Vignes : 4, rue Jacques Monod - 91893 Orsay Cedex
Centre de recherche INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399